

RAZVOJ DIGITALNIH SISTEMOV

1. kolokvij

6. 12. 2019

1. Izrazite podano logično funkcijo f samo s Pierceovimi operatorji. Morebitne negacije realizirajte s Pierceovim operatorjem.

$$f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 \downarrow x_2) \cdot \overline{x_3} + ((\overline{x_2} \equiv x_3) \downarrow \overline{x_1})$$

2. Ali je funkcija f linearna? Če je linearna, potem izračunajte koeficiente linearnosti. Če ni linearna, potem utemeljite zakaj.

$$f^4 = V(0, 3, 4, 7, 9, 10, 13, 14)$$

3. Realizirajte funkcijo f z redundantnimi mintermi z eno 4-bitno aritmetično–logično enoto (ALU). Vse dobljene negacije vhodnih spremenljivk izvedite z ALU.

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = V(2, 4, 7, 10, 12, 15) \quad \text{in} \quad V_x(0, 3, 6, 8, 14)$$

4. Pretvorite število $8224_{10} = 2020_{16}$ v BCD zapis z uporabo "double dabble" algoritma.

Rešitev 1. naloge

Realizacija s samimi Piercevimi (NOR, oziroma \downarrow) operatorji zahteva pretvorbo funkcije v minimalno disjunktivno (MDNO) ali minimalno konjunktivno obliko (MKNO).

$$f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 \downarrow x_2) \cdot \overline{x_3} + ((\overline{x_2} \equiv x_3) \downarrow \overline{x_1})$$

V ta namen moramo najprej operatorje (EQU, Pierce) v podani funkciji izpisati z disjunktijami in konjunktijami. Začnemo s prvim Pierceovim operatorjem in ekvivalenco izrazimo kot negacijo XOR:

$$f(x_1, x_2, x_3) = (\overline{x_1 + x_2}) \cdot \overline{x_3} + \left(\overline{(\overline{x_2 \oplus x_3}) + x_1} \right)$$

Nad posameznima členoma uporabimo De Morganov teorem:

$$f(x_1, x_2, x_3) = \overline{x_1} \cdot \overline{x_2} \cdot \overline{x_3} + (\overline{x_2 \oplus x_3}) \cdot x_1$$

Izpišemo enačbo funkcije XOR ($a \oplus b = \overline{a} \cdot b + a \cdot \overline{b}$) in dobimo:

$$f(x_1, x_2, x_3) = \overline{x_1} \cdot \overline{x_2} \cdot \overline{x_3} + (\overline{x_2} \cdot \overline{x_3} + x_2 \cdot x_3) \cdot x_1$$

Razširimo še zadnjo konjunktijo, nato pa združimo prva dva člena in dobimo obliko MDNO:

$$f(x_1, x_2, x_3) = \overline{x_1} \cdot \overline{x_2} \cdot \overline{x_3} + x_1 \cdot \overline{x_2} \cdot \overline{x_3} + x_1 \cdot x_2 \cdot x_3$$

$$f(x_1, x_2, x_3) = (\overline{x_1} + x_1) \cdot \overline{x_2} \cdot \overline{x_3} + x_1 \cdot x_2 \cdot x_3$$

$$f(x_1, x_2, x_3) = \overline{x_2} \cdot \overline{x_3} + x_1 \cdot x_2 \cdot x_3$$

Ena možnost rešitve je, da obliko MDNO pretvorimo v same Pierceove operatorje z dvojno negacijo celotne funkcije in dvojno negacijo posameznih členov:

$$f(x_1, x_2, x_3) = \overline{\overline{\overline{\overline{\overline{x_2 \cdot \overline{x_3}} + x_1 \cdot x_2 \cdot x_3}}}}$$

Negaciji "čez vse" pustimo, nad posameznimi členi pa z eno negacijo ob uporabi De Morganovega teorema pretvorimo konjunktije v disjunktije:

$$f(x_1, x_2, x_3) = \overline{\overline{\overline{\overline{\overline{x_3 + x_2 + x_1 + x_2 + x_3}}}}}$$

Dobljeno obliko predstavimo s Piercevimi operatorji

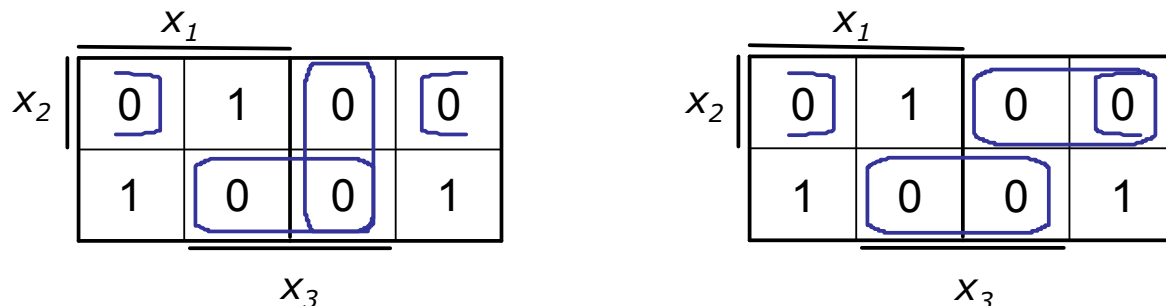
$$f(x_1, x_2, x_3) = \overline{\overline{\overline{\overline{\overline{x_3 + x_2 + x_1 + x_2 + x_3}}}}}$$

$$f(x_1, x_2, x_3) = (\overline{x_3 \downarrow x_2}) \downarrow (\overline{x_1 \downarrow x_2 \downarrow x_3})$$

Negacije spremenljivk izrazimo z uporabo lastnosti $\overline{x} = x \downarrow x$:

$$f(x_1, x_2, x_3) = ((x_3 \downarrow x_2) \downarrow ((x_1 \downarrow x_1) \downarrow (x_2 \downarrow x_2) \downarrow (x_3 \downarrow x_3))) \downarrow ((x_3 \downarrow x_2) \downarrow ((x_1 \downarrow x_1) \downarrow (x_2 \downarrow x_2) \downarrow (x_3 \downarrow x_3)))$$

Druga pot do izražave s Pierceovimi operatorji vodi preko MKNO. Dobljeno MDNO izrišemo v Veitchev diagram in določimo MKNO. Možnosti za minimalno združevanje sta dve:



MKNO najenostavneje določimo tako, da izražamo *negacijo* f s tem da združujemo ničle in združene člene izražamo v disjunktivni obliki, nato pa negacijo funkcije f prenesemo na drugo stran enačbe.

$$\overline{f(x_1, x_2, x_3)} = \overline{x_2 \cdot x_3 + x_1 \cdot x_3 + x_2 \cdot x_3}$$

$$f(x_1, x_2, x_3) = \overline{\overline{x_2 \cdot x_3 + x_1 \cdot x_3 + x_2 \cdot x_3}}$$

Nad dobljeno enačbo uporabimo De Morganov teorem:

$$f(x_1, x_2, x_3) = \overline{\overline{x_2 \cdot x_3 + x_1 \cdot x_3 + x_2 \cdot x_3}}$$

$$f(x_1, x_2, x_3) = \left(\overline{\overline{x_2 \cdot x_3}} \right) \cdot \left(\overline{\overline{x_1 \cdot x_3}} \right) \cdot \left(\overline{\overline{x_2 \cdot x_3}} \right)$$

$$f(x_1, x_2, x_3) = (x_2 + \overline{x_3}) \cdot (x_1 + \overline{x_3}) \cdot (\overline{x_2} + x_3)$$

Iz dobljene MKNO preidemo v Pierceovo obliko tako, da celotno funkcijo dvakrat negiramo:

$$f(x_1, x_2, x_3) = \overline{\overline{(x_2 + \overline{x_3}) \cdot (x_1 + \overline{x_3}) \cdot (\overline{x_2} + x_3)}}$$

$$f(x_1, x_2, x_3) = \overline{\overline{\overline{x_2 + \overline{x_3}} + \overline{x_1 + \overline{x_3}} + \overline{\overline{x_2} + x_3}}}$$

$$f(x_1, x_2, x_3) = (x_2 \downarrow \overline{x_3}) \downarrow (x_1 \downarrow \overline{x_3}) \downarrow (\overline{x_2} \downarrow x_3)$$

Preostale negacije spremenljivk izrazimo z uporabo lastnosti $\overline{x} = x \downarrow x$:

$$f(x_1, x_2, x_3) = (x_2 \downarrow \overline{x_3}) \downarrow (x_1 \downarrow \overline{x_3}) \downarrow (\overline{x_2} \downarrow x_3)$$

$$f(x_1, x_2, x_3) = (x_2 \downarrow (x_3 \downarrow x_3)) \downarrow (x_1 \downarrow (x_3 \downarrow x_3)) \downarrow ((x_2 \downarrow x_2) \downarrow x_3)$$

Cenejšo rešitev dobimo preko izvedbe z MKNO.

Rahlo drugačno rešitev dobimo z združevanjem na desnem Veitchevem diagramu:

$$\overline{f(x_1, x_2, x_3)} = \overline{x_2 \cdot x_3 + x_1 \cdot x_2 + x_2 \cdot x_3}$$

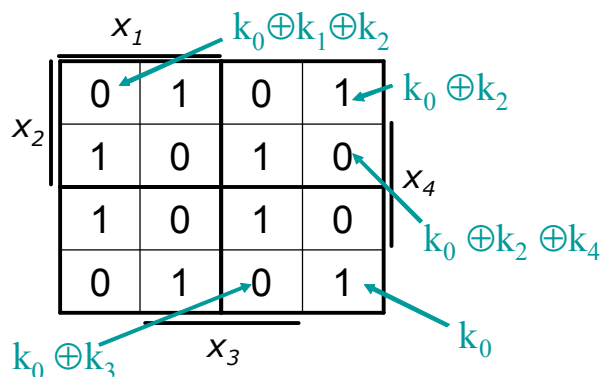
$$f(x_1, x_2, x_3) = \overline{\overline{x_2 \cdot x_3 + x_1 \cdot x_2 + x_2 \cdot x_3}}$$

$$f(x_1, x_2, x_3) = (x_2 \downarrow \overline{x_3}) \downarrow (x_1 \downarrow \overline{x_2}) \downarrow (\overline{x_2} \downarrow x_3)$$

$$f(x_1, x_2, x_3) = (x_2 \downarrow (x_3 \downarrow x_3)) \downarrow (x_1 \downarrow (x_2 \downarrow x_2)) \downarrow ((x_2 \downarrow x_2) \downarrow x_3)$$

Rešitev 2. naloge:

Potrebno je določiti koeficiente linearnosti funkcije podane v PDNO. Linearnost funkcije ugotavljamo tako, da prepogibamo kvadrate diagrama: Začnemo v desnem spodnjem kotu (kjer je minterm 0) in prepognemo kvadrat navzgor, da se spremeni samo ena spremenljivka naenkrat (recimo da x_4 postane 1 v prvi iteraciji). Opazujemo, ali se prepogne na novi kvadrat čisto enako ali pa popolnoma negirano. Prepogibanje je prikazano v knjigi, stran 79, vaja 6.5.5.



Podana funkcija je funkcija 4 spremenljivk, zato lahko njeno splošno izražavo kot linearno funkcijo pišemo kot:

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = k_0 \oplus k_1 x_1 \oplus k_2 x_2 \oplus k_3 x_3 \oplus k_4 x_4 \quad (0.1)$$

S pomočjo Veitch-evega diagrama izračunamo koeficiente.

Iz enačb sledi: $k_0=1$ in $k_0 \oplus k_3=0$, kar pomeni $0 \oplus k_3=1 \rightarrow k_3=1$.

In če napišemo še enačbo za $k_0 \oplus k_2=1$, kar pomeni $1 \oplus k_2=1$ sledi da je $k_2=0$.

Iz enačbe $k_0 \oplus k_2 \oplus k_4=0$, kar pomeni $1 \oplus 0 \oplus k_4=0 \rightarrow k_4=1$.

Če analiziramo naprej dobimo $k_0 \oplus k_1 \oplus k_2=0$, kar pomeni $1 \oplus k_1 \oplus 0=0 \rightarrow k_1=1$.

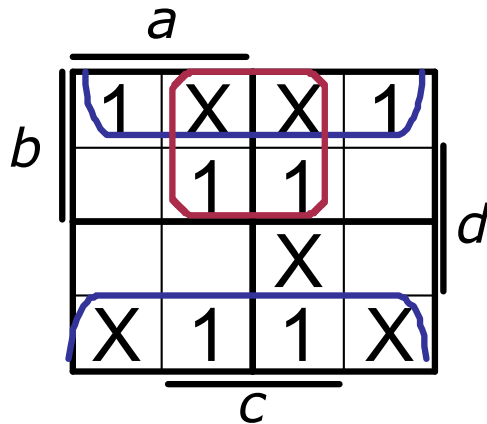
Če vstavimo dobljeno v enačbo (0.1) dobimo: $k_0=1 \quad k_1=1 \quad k_2=0 \quad k_3=1 \quad k_4=1$

In rešitev:

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, x_3, x_4) &= 1 \oplus x_1 \oplus x_3 \oplus x_4 \\ f(x_1, x_2, x_3, x_4) &= \overline{x_1 \oplus x_3 \oplus x_4} \\ f(x_1, x_2, x_3, x_4) &= (x_1 \equiv x_3 \equiv x_4) \end{aligned}$$

Rešitev 3. naloge:

Funkcija f je podana v obliki PDNO z redundancami, zato je ni treba posebej pretvarjati in iskati MNO, ampak jo samo minimiziramo ter zapišemo v MDNO.



Izrazimo MDNO obliko:

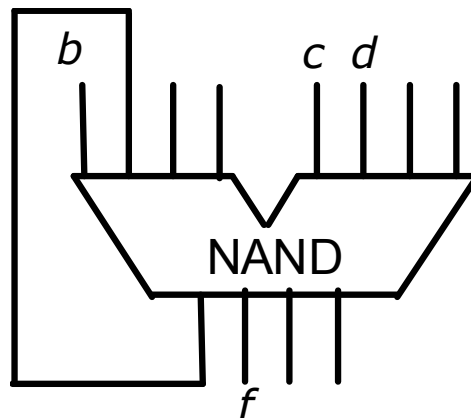
$$f_{MDNO} = \bar{d} + b \cdot c$$

Aritmetično–logično enota lahko poleg aritmetičnih naenkrat realizira štiri dvovhodne logične operacije *istega tipa* (OR, AND, NOT, NOR, NAND, XOR, XNOR), zato nas zanima realizacija zgornje funkcije z dvovhodnimi operatorji enega tipa. Pri realizaciji so zato primerne čimbolj nenormalne oblike (večnivojske oblike), samo da vsebujejo operatorje ene vrste. Podana funkcija je v MDNO, zato za neposredno realizacijo s 4-bitno ALU ni primerna, saj vsebuje operaciji AND in OR – torej bi za realizacijo rabili najmanj dve aritmetični–logični enoti in tretjo za izvedbo inverterjev. Funkcijo MDNO prevedemo na operator enega tipa – operator NAND, kar pomeni obliko SNO (Sheffer–jeva normalna oblika funkcije):

$$f(a,b,c,d) = \bar{d} + b \cdot c$$

$$f(a,b,c,d) = \overline{\overline{\bar{d} + b \cdot c}} = \overline{\overline{\bar{d}} \cdot \overline{b \cdot c}} = \overline{\bar{d} \cdot \bar{b} \cdot \bar{c}} = d \uparrow (b \uparrow c)$$

Narišemo realizacijo:



Rešitev 4. naloge:

Število 2020_{16} zapišemo v dvojiški obliki $0010\ 0000\ 0010\ 0000_2$. Vodilni ničli v zapisu nas ne zanimata, zato ju lahko v zapisu začetne vrednosti v tabeli ne pišemo. Prve štiri pomike lahko preskočimo, saj do prvega prištevanja pride šele, ko prva '1' doseže vrednost 1000_2 .

				1 0 0 0	0 0 0 0	0 0 1 0	0 0 0 0
			1 0 0 0	0 0 0 0	1 0 0 0	0 0 0 0	
			1 0 1 1	0 0 0 0	1 0 0 0	0 0 0 0	
		1	0 1 1 0	0 0 0 1	0 0 0 0	0 0 0 0	
		1	1 0 0 1	0 0 0 1	0 0 0 0	0 0 0 0	
		1 1	0 0 1 0	0 0 1 0	0 0 0 0	0 0 0 0	
		1 1 0	0 1 0 0	0 1 0 0	0 0 0 0	0 0 0 0	
		1 0 0 1	0 1 0 0	0 1 0 0	0 0 0 0	0 0 0 0	
	1	0 0 1 0	1 0 0 0	1 0 0 0	1 0 0 0	0 0 0 0	
	1	0 0 1 0	1 0 1 1	1 0 0 0	1 0 0 0	0 0 0 0	
	1 0	0 1 0 1	0 1 1 1	0 0 0 0	0 0 0 0	0 0 0 0	
	1 0	1 0 0 0	1 0 1 0	0 0 0 0	0 0 0 0	0 0 0 0	
	1 0 1	0 0 0 1	0 1 0 0	0 0 0 0	0 0 0 0	0 0 0 0	
	1 0 0 0	0 0 0 1	0 1 0 0	0 0 0 0	0 0 0 0	0 0 0 0	
1	0 0 0 0	0 0 1 0	1 0 0 0	0 0 0 0	0 0 0 0		
1	0 0 0 0	0 0 1 0	1 0 1 1	0 0 0 0			
1 0	0 0 0 0	0 1 0 1	0 1 1 0	0 0			
1 0	0 0 0 0	1 0 0 0	1 0 0 1	0 0			
1 0 0	0 0 0 1	0 0 0 1	0 0 1 0	0			
1 0 0 0	0 0 1 0	0 0 1 0	0 1 0 0				

Zapis posameznih števk rezultata v BCD zapisu (8224_{10}) se glasi: $1000\ 0010\ 0010\ 0100$.

Srečno 2020 ☺!