

RAZVOJ DIGITALNIH SISTEMOV

1. kolokvij
13. 12. 2018

1. Izrazite podano logično funkcijo samo s Shefferjevimi operatorji. Morebitne negacije realizirajte s Shefferjevim operatorjem.

$$f(a, b, c) = \overline{(a + b) \downarrow \bar{c}} \equiv (a \downarrow c)$$

2. Uporabite ROM vezje za realizacijo funkcij:

$$g_1 = x_1 + \bar{x}_2 \cdot \bar{x}_3 \quad g_2 = \bar{x}_1 \cdot x_3 + x_1 \cdot x_2$$

ROM vezje ima 3 naslovne spremenljivke in 2 bitno vsebino. Narišite shemo ROM vezja in v shemi označite programirane povezave s piko (●). Programirane povezave naj realizirajo funkciji g_1 in g_2 .

3. Realizirajte funkcijo f v obliki PDNO z redundancami s čim manj izbiralniki 4/1.

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = V(1, 2, 9, 13, 15) \text{ in } V_x(0, 5, 11, 12)$$

4. Pretvorite število $2019_{10} = 07E3_{16}$ v BCD zapis z uporabo "double dabble" algoritma.

Rešitev 1. naloge

Realizacija s samimi Shefferjevimi (NAND, oziroma \uparrow) operatorji najprej zahteva pretvorbo funkcije v disjunktivno obliko (če se da, normalno).

$$f(a, b, c) = \overline{\left((a + b) \downarrow \bar{c}\right)} \equiv (a \downarrow c)$$

V ta namen moramo najprej operatorje (EQU, Pierce) v podani funkciji izpisati z disjunkcijami in konjunkcijami. Začnemo na najvišjem nivoju, pri negaciji "čez vse" in EQU funkciji - oboje skupaj predstavlja XOR na najvišjem nivoju, ki jo izpišemo po definiciji XOR $\bar{x} \cdot y + x \cdot \bar{y} = x \oplus y$:

$$\begin{aligned} f(a, b, c) &= \left((a + b) \downarrow \bar{c}\right) \oplus (a \downarrow c) = \\ &= \left((a + b) \downarrow \bar{c}\right) \cdot \overline{(a \downarrow c)} + \overline{\left((a + b) \downarrow \bar{c}\right)} \cdot (a \downarrow c) \end{aligned}$$

Izpišemo še oba Pierceva (NOR) operatorja, pri čemer izničimo nastali dvojni negacijo drugega in tretjega člena ($x + y = x \downarrow y$):

$$f(a, b, c) = \overline{\left((a + b) + \bar{c}\right)} \cdot (a + c) + \left((a + b) + \bar{c}\right) \cdot \overline{(a + c)}$$

Uporabimo DeMorganov teorem nad negiranimi členi in nekaj ostalih osnovnih lastnosti Boole-ove logike ($x \cdot x = x$ in $x \cdot \bar{x} = 0$):

$$\begin{aligned} f(a, b, c) &= \overline{(a + b)} \cdot c \cdot (a + c) + \left((a + b) + \bar{c}\right) \cdot \bar{a} \cdot \bar{c} = \\ &= \bar{a} \cdot \bar{b} \cdot c \cdot (a + c) + (a + b + \bar{c}) \cdot \bar{a} \cdot \bar{c} = \\ &= \bar{a} \cdot \bar{b} \cdot c \cdot \bar{a} + \bar{a} \cdot \bar{b} \cdot c \cdot c + \bar{a} \cdot \bar{c} \cdot a + \bar{a} \cdot \bar{c} \cdot b + \bar{a} \cdot \bar{c} \cdot \bar{c} = \\ &= \bar{a} \cdot \bar{b} \cdot c + \bar{a} \cdot \bar{b} \cdot \bar{c} + \bar{a} \cdot \bar{c} = \bar{a} \cdot \bar{b} + \bar{a} \cdot \bar{c} \end{aligned}$$

Dobili smo disjunktivno normalno obliko (DNO):

$$f(a, b, c) = \bar{a} \cdot \bar{b} \cdot c + \bar{a} \cdot \bar{c}$$

Dobljeno DNO pretvorimo v Shefferjevo (NAND) obliko tako, da dvakrat negiramo posamezne člene:

$$\begin{aligned} f(a, b, c) &= \bar{a} \cdot \bar{b} + \bar{a} \cdot \bar{c} = \overline{\overline{\bar{a} \cdot \bar{b}}} + \overline{\overline{\bar{a} \cdot \bar{c}}} \\ &= \overline{\overline{\bar{a} \cdot \bar{b}}} + \overline{\overline{\bar{a} \cdot \bar{c}}} = (\bar{a} \uparrow \bar{b}) \uparrow (\bar{a} \uparrow \bar{c}) \end{aligned}$$

Preostale negacije spremenljivk izrazimo z uporabo lastnosti $\bar{x} = x \uparrow x$:

$$\begin{aligned} f(a, b, c) &= (\bar{a} \uparrow \bar{b}) \uparrow (\bar{a} \uparrow \bar{c}) \\ &= ((a \uparrow a) \uparrow (b \uparrow b)) \uparrow ((a \uparrow a) \uparrow (c \uparrow c)) \end{aligned}$$

Rešitev 2. naloge:

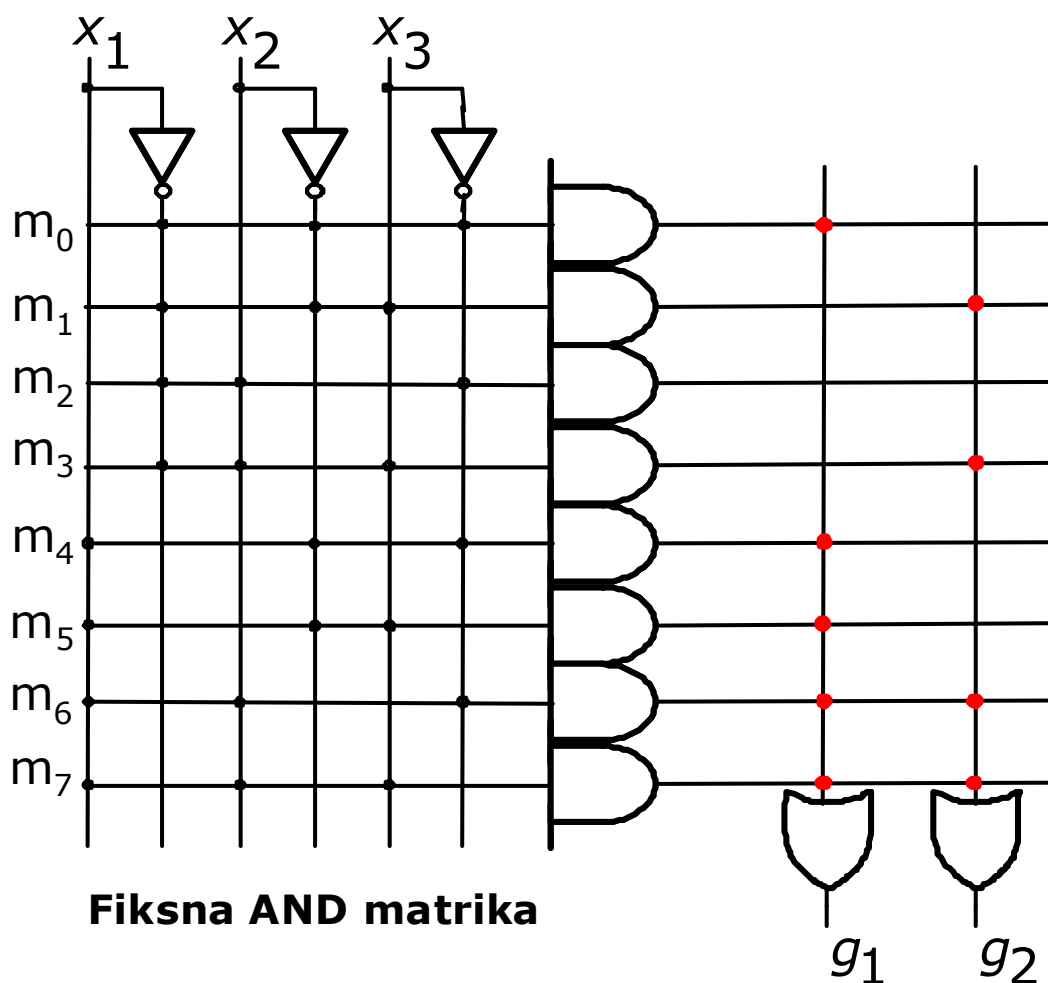
Če se funkcije ne nahajajo v popolni disjunktivni normalni obliki (PDNO), jih prevedemo v to obliko z uporabo pravil Booleove algebre. Funkcijo lahko tudi izpišemo v Veitchev diagram in izpišemo številke mintermov, kjer je funkcija enaka '1'.

$$\begin{aligned} g_1(x_1, x_2, x_3) &= x_1 + \overline{x_2} \cdot \overline{x_3} = x_1 \cdot (\overline{x_2} \cdot \overline{x_3} + x_2 \cdot \overline{x_3} + \overline{x_2} \cdot x_3 + x_2 \cdot x_3) + (\overline{x_1} + x_1) \cdot \overline{x_2} \cdot \overline{x_3} \\ g_1(x_1, x_2, x_3) &= x_1 \cdot \overline{x_2} \cdot \overline{x_3} + x_1 \cdot x_2 \cdot \overline{x_3} + x_1 \cdot \overline{x_2} \cdot x_3 + x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 + \overline{x_1} \cdot \overline{x_2} \cdot \overline{x_3} + \overline{x_1} \cdot x_2 \cdot \overline{x_3} \\ g_1(x_1, x_2, x_3) &= x_1 \cdot \overline{x_2} \cdot \overline{x_3} + x_1 \cdot x_2 \cdot \overline{x_3} + x_1 \cdot \overline{x_2} \cdot x_3 + x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 + \overline{x_1} \cdot \overline{x_2} \cdot \overline{x_3} \\ g_1(x_1, x_2, x_3) &= V(4, 6, 5, 7, 0) \end{aligned}$$

Podobno storimo še za preostale funkcije:

$$\begin{aligned} g_2 &= \overline{x_1} \cdot x_3 + x_1 \cdot x_2 = \overline{x_1} \cdot (\overline{x_2} + x_2) \cdot x_3 + x_1 \cdot x_2 \cdot (\overline{x_3} + x_3) \\ g_2(x_1, x_2, x_3) &= \overline{x_1} \cdot \overline{x_2} \cdot x_3 + \overline{x_1} \cdot x_2 \cdot x_3 + x_1 \cdot x_2 \cdot \overline{x_3} + x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \\ g_2(x_1, x_2, x_3) &= V(1, 3, 6, 7) \end{aligned}$$

PDNO je najprimernejša oblika za realizacijo z ROM, ker je matrika AND fiksna. Programirane vrednosti AND matrike predstavljajo vse minterme funkcije treh spremenljivk ($x_1 \ x_2 \ x_3$) od m_0 do m_7 . Številka minterma določa naslov lokacije ROM pomnilnika.



Narišemo celotno vezje ROM strukture in vstavimo pike (•) v OR matriki tam, kjer želimo programirati določeno spremenljivko v členu PDNO.

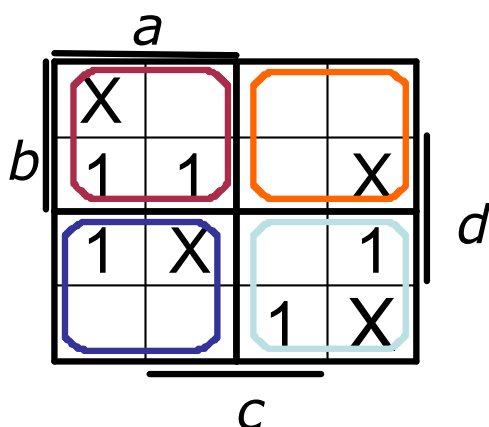
Čas pisanja je 60 minut. Vsaka naloga je vredna 10 točk.
Na list z rešitvami se podpišite in napišite še vpisno številko.
Rezultati bodo objavljeni na domači strani predmeta.

Rešitev 3. naloge:

Funkcija f je podana v obliki PDNO z redundancami.

$$f = V(1,2,9,13,15) \text{ in } V_x(0,5,11,12)$$

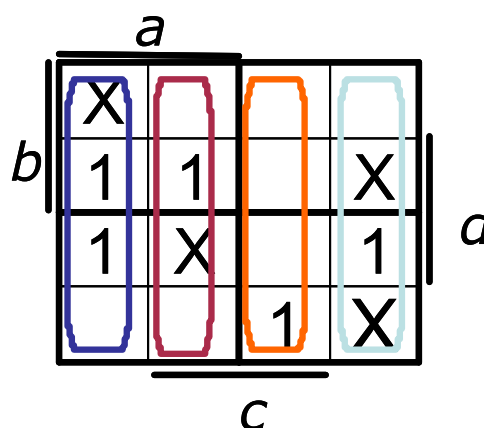
Dobljeno funkcijo vrišemo v Veitchev diagram. Ker iščemo najcenejšo realizacijo z izbiralnikom 4/1, bomo naredili razvoj po vseh kombinacijah naslovnih spremenljivk v Veitchevem diagramu. Če izberemo kot naslovni spremenljivki a in b , potem dobimo:



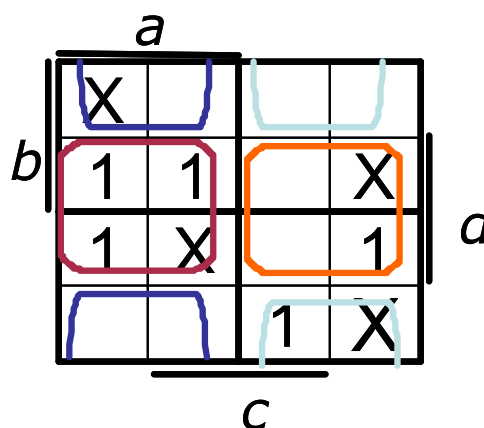
V zgornjem Veitchevem diagramu so označena vsa štiri polja štirih mintermov, če izberemo vhodni spremenljivki a in b . Zgornji levi kvadrat (rdeč) pomeni, da bo to polje izbrano ko bosta $ab="11"$, oranžni kvadrat ko bo $ab="01"$, temno modri ko bo $ab="10"$ in svetlo modri ko bo $ab="00"$. Vsakega od teh kvadratov poskušamo opisati s čimbolj enostavno funkcijo: Vrednost zgornjega levega kvadrata opišemo s spremenljivko d , če postavimo redundanco na '0'. Vrednost spodnjega desnega kvadrata je bolj komplicirana, saj moramo vsako '1' opisati posebej: Za zgornjo '1' v tem kvadratu velja $c \cdot d$, za spodnjo '1' pa $c \cdot d'$. Funkcija bo torej $c \cdot d + c \cdot d'$, kar je enačba funkcije XOR. Najbolj enostavna realizacija je zgornji desni kvadrat, ki je kar '0', če postavimo redundanco na '0'. Zato, da bi pregledali še ostale možnosti, moramo narisati še preostalih pet kombinacij

dveh naslovnih vhodov.

Če izberemo kot naslovni spremenljivki a in c , dobimo levi Veitchev diagram, če a in d , pa desnega. Podobno kot v prejšnjem primeru poiščemo realizacije ustreznih kvadratov in iščemo najcenejšo realizacijo: Izogibamo se veliko različnim funkcijam in iščemo drugače kvadratov, ki vsebujejo same '1' ali same '0'. Pri razvoju po a in c imamo pri $ac="01"$ najneugodnejšo funkcijo, saj vsebuje eno samo '1'.

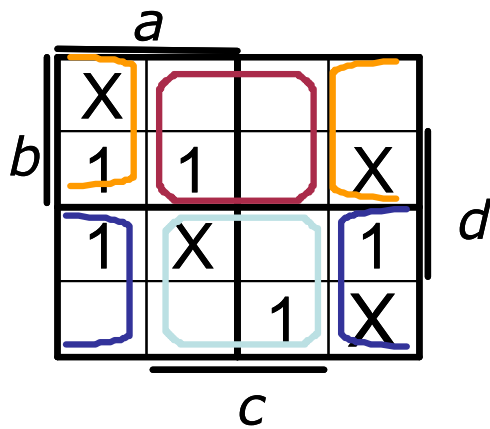


Pri razvoju po a in d nikjer ne nastopa ena sama '1' ali tri '1' ali diagonala (XOR) dveh '1'.

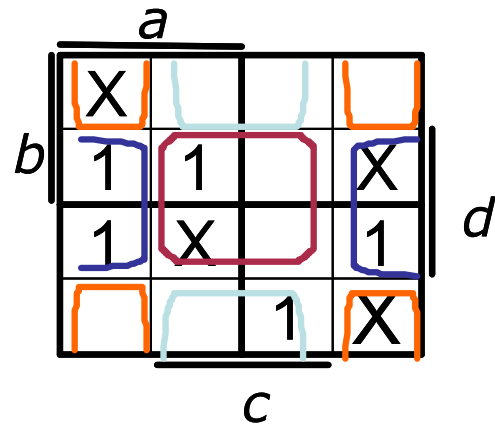
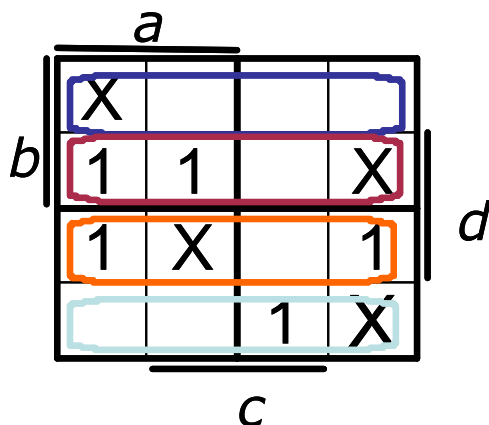


Nato izberemo naslovni spremenljivki b in c , (levi Veitchev diagram) in b in d

(desni diagram). Pri razvoju po b in c imamo pri $bc="11"$ najneugodnejšo funkcijo (rdeč), saj vsebuje eno samo '1'.

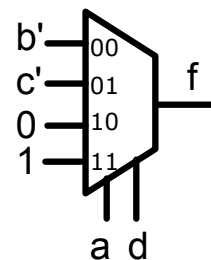


Pri razvoju po b in d dobimo eno (od dveh) možno realizacijo s funkcijskimi ostanki: $F_{00}=a'$; $F_{01}=c'$; $F_{10}=0$ in $F_{11}=a$.



Zadnja kombinacija naslovnih vhodov je cd. Pri razvoju po c in d imamo pri $cd="10"$ najneugodnejšo funkcijo (svetlo moder), saj vsebuje eno samo '1'. Najbolj ugodna kombinacija za realizacijo je torej razvoj po spremenljivkah a in d.

Končna realizacija funkcije je lahko:



Druga možna rešitev je kombinacija naslovnih spremenljivk b in d.

**Čas pisanja je 60 minut. Vsaka naloga je vredna 10 točk.
Na list z rešitvami se podpišite in napišite še vpisno številko.
Rezultati bodo objavljeni na domači strani predmeta.**