

# RAZVOJ DIGITALNIH SISTEMOV

1. kolokvij

17. 12. 2020

1. Določite minimalno normalno obliko (MNO) podane logične funkcije  $f$ .

$$f(x_1, x_2, x_3) = \overline{(x_1 \uparrow x_2) \cdot \bar{x}_3 + (x_1 \equiv x_3)}$$

2. Realizirajte podano funkcijo  $f$  v obliki PKNO z redundantnimi makstermi z eno 4-bitno aritmetično–logično enoto (ALU). Vse dobljene negacije vhodnih spremenljivk izvedite z ALU.

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = \&(1, 3, 4, 6, 7, 14, 15) \text{ in } \&_x(0, 5, 10, 12, 13)$$

3. Realizirajte funkcijo  $f$  z enim izbiralnikom 4/1.

$$f(a, b, c, d) = \overline{(a \cdot b)} \oplus c \cdot (a + d)$$

4. Pretvorite število  $2021_{21} = 18565_{10} = 4885_{16}$  v BCD zapis z uporabo "double dabble" algoritma.

## Rešitev 1. naloge

Določitev minimalne normalne oblike funkcije (MNO) zahteva njeno pretvorbo v minimalno disjunktivno (MDNO) in minimalno konjunktivno obliko (MKNO). Iz primerjave COST obeh funkcij določimo MNO kot cenejšo izvedbo. Funkcijo  $f$  moramo pretvoriti v disjunktivno obliko:

$$f = \overline{(x_1 \uparrow x_2) \cdot \bar{x}_3 + (x_1 \equiv x_3)}$$

Začnemo s prvim Shefferjevim ( $\uparrow$ ) operatorjem in ekvivalenco ( $\equiv$ ) izrazimo kot negacijo XOR:

$$f = \overline{(\bar{x}_1 \cdot x_2 \cdot \bar{x}_3 + x_1 \oplus x_3)}$$

Nad členom  $\bar{x}_1 \cdot x_2 \cdot \bar{x}_3$  uporabimo De Morganov teorem ( $\overline{x + y} = \bar{x} \cdot \bar{y}$ ).

$$f = \overline{(\overline{\bar{x}_1 \cdot x_2 \cdot \bar{x}_3} + x_1 \oplus x_3)}$$

Nad členom  $(\bar{x}_1 \cdot x_2 \cdot \bar{x}_3)$ , členom XOR ter negacijo »čez vse« uporabimo De Morganov teorem  $x \cdot y = \overline{\bar{x} + \bar{y}}$ .

$$f = (x_1 \cdot x_2 + x_3) \cdot (x_1 \oplus x_3)$$

Izpišemo XOR:

$$f = (x_1 \cdot x_2 + x_3) \cdot (\bar{x}_1 \cdot x_3 + x_1 \cdot \bar{x}_3)$$

Razstavimo člene:

$$f = x_1 \cdot x_2 \cdot \bar{x}_1 \cdot x_3 + x_3 \cdot \bar{x}_1 \cdot x_3 + x_1 \cdot x_2 \cdot x_1 \cdot \bar{x}_3 + x_3 \cdot x_1 \cdot \bar{x}_3$$

Prvi in zadnji členi sta nič, saj velja lastnost Boole-ove algebre  $(x \cdot \bar{x}) = 0$ . Nad srednjima členoma uporabimo lastnost  $(x \cdot x) = x$ .

$$f = f_{MDNO} = \bar{x}_1 \cdot x_3 + x_1 \cdot x_2 \cdot \bar{x}_3$$

Dobljena oblika je MDNO, ker je ne moremo več poenostavljati. *COST* funkcije  $f_{MDNO}$  znaša (3, 7). Funkcijo  $f_{MDNO}$  »pretvorimo« v MKNO tako da narišemo Veitchev diagram, iz katerega izrazimo  $\bar{f}$ . Funkcijo  $\bar{f}$  izrazimo tako da v Veitchevem diagramu zberemo ničle in običajno združujemo člene v disjunktivni obliki.

	$x_1$			
$x_2$	1	0	1	0
	0	0	1	0
	$x_3$			

Dobljeno zapišemo kot:

$$\bar{f} = \bar{x}_1 \cdot \bar{x}_3 + x_1 \cdot x_3 + x_1 \cdot \bar{x}_2$$

Levo in desno stran enačbe negiramo še enkrat, da se negacija prenese na desno stran enačbe.

$$f = \overline{\bar{x}_1 \cdot \bar{x}_3 + x_1 \cdot x_3 + x_1 \cdot \bar{x}_2}$$

Če dvakrat uporabimo De Morganov teorem:

$$f = (\overline{\bar{x}_1 \cdot \bar{x}_3}) \cdot (\overline{x_1 \cdot x_3}) \cdot (\overline{x_1 \cdot \bar{x}_2}) = (x_1 + x_3) \cdot (\bar{x}_1 + \bar{x}_3) \cdot (\bar{x}_1 + x_2)$$

Končno dobimo MKNO:

$$f_{MKNO} = (x_1 + x_3) \cdot (\bar{x}_1 + \bar{x}_3) \cdot (\bar{x}_1 + x_2)$$

katere *COST* znaša (4, 9). Cenejša je MDNO, zato velja  $f_{MNO} = f_{MDNO}$ .

Čas pisanja je 60 minut. Vsaka naloga je vredna 10 točk.

Na list z rešitvami se podpišite in napišite še vpisno številko.

Rezultati bodo objavljeni na domači strani predmeta.

Rešitev 2. naloge:

Funkcija  $f$  je podana v obliki PKNO z redundancami:

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = \&(1, 3, 4, 6, 7, 14, 15) \text{ in } \&_x(0,5,10,12,13)$$

Najprej jo pretvorimo v obliko PDNO, da maksterme preslikamo v minterme. V pravilnostno tabelo funkcije najprej zapišemo številke mintermov ( $m$ ) in pripadajoče številke makstermov ( $M$ ). Vpišemo  $f=0$  za vse maksterme in  $f=X$  za vse redundantne maksterme. Na preostala mesta vpišemo  $f=1$  in preberemo pri katerih mintermih je  $f=1$  oz.  $f=X$  ter funkcijo izrazimo v obliki PDNO.

Tabela mintermov in makstermov:

$m$	$M$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$f$
0	15	0	0	0	0	0
1	14	0	0	0	1	0
2	13	0	0	1	0	X
3	12	0	0	1	1	X
4	11	0	1	0	0	1
5	10	0	1	0	1	X
6	9	0	1	1	0	1
7	8	0	1	1	1	1
8	7	1	0	0	0	0
9	6	1	0	0	1	0
10	5	1	0	1	0	X
11	4	1	0	1	1	0
12	3	1	1	0	0	0
13	2	1	1	0	1	1
14	1	1	1	1	0	0
15	0	1	1	1	1	X

Funkcijo zapišemo v PDNO:

$$f = V(4,6,7,13) \text{ in } V_x(2,3,5,10,15)$$

Funkcijo minimiziramo v MDNO.

$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$
0	0	1	1
1	X	1	X
0	0	X	0
0	X	X	0

$$f_{MDNO} = \overline{x_1} \cdot x_2 + x_2 \cdot x_4$$

Izpostavimo  $x_2$  ter dvakrat negiramo:

$$f = \overline{x_2}(\overline{x_1} + x_4)$$

Uporabimo De Morganov teorem s prvo negacijo in dobimo:

$$f = \overline{\overline{x_2} + \overline{x_1} + x_4}$$

Dobljeno funkcijo zapišemo s Piercevimi operatorji:

$$f = \overline{x_2} \downarrow (\overline{x_1} \downarrow x_4)$$

Podobno storimo za MKNO:

$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$
0	0	1	1
1	X	1	X
0	0	X	0
0	X	X	0

$$\overline{f} = \overline{x_2} + x_1 \cdot \overline{x_4}$$

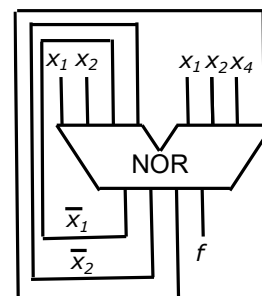
Levo in desno stran enačbe negiramo še enkrat, da se negacija prenese na desno stran enačbe.

$$f = \overline{\overline{x_2} + x_1 \cdot \overline{x_4}}$$

Nad členom  $\overline{x_1 \cdot \overline{x_4}}$  uporabimo De Morganov teorem  $\overline{x + y} = \overline{x} \cdot \overline{y}$ :

$$f = \overline{x_2} + \overline{\overline{x_1} + x_4}$$

Dobimo enako funkcijo kot prej (Piercevimi operatorji), kar realiziramo z eno ALU:



Za realizacijo s Shefferjevimi operatorji izhajamo iz negacije funkcije:

$$\bar{f} = \bar{x}_2 + x_1 \cdot \bar{x}_4$$

Izvedemo dvojno negacijo nad posameznima členoma

$$\bar{f} = \overline{\bar{x}_2} + \overline{x_1 \cdot \bar{x}_4}$$

Uporabimo De Morganov teorem  $\overline{x \cdot y} = \bar{x} + \bar{y}$ :

$$\bar{f} = \overline{\bar{x}_2 \cdot x_1 \cdot \bar{x}_4}$$

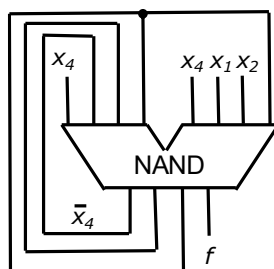
Dobljeno negacijo funkcije izrazimo s Shefferjevimi operatorji:

$$\bar{f} = x_2 \uparrow (x_1 \uparrow \bar{x}_4)$$

Z uporabo lastnosti  $x \uparrow x = \bar{x}$  dobimo končni izraz:

$$f = \left( x_2 \uparrow (x_1 \uparrow (x_4 \uparrow x_4)) \right) \uparrow \left( x_2 \uparrow (x_1 \uparrow (x_4 \uparrow x_4)) \right)$$

Dobljeno funkcijo realiziramo z eno ALU:



Rešitev 3. naloge:

Funkcija  $f$  je podana v večnivojski (nenormalni) obliki:

$$f(a, b, c, d) = \overline{(a \cdot b)} \oplus c \cdot (a + d)$$

zato jo najprej poenostavimo z uporabo pravil Boole-ove logike. Izpišemo levi člen XOR operacije.

$$f(a, b, c, d) = \overline{(a \cdot b)} \oplus c \cdot (a + d) = (a \cdot b \cdot c + \overline{a \cdot b} \cdot \bar{c}) \cdot (a + d)$$

Uporabimo De Morganov teorem, da dobimo DNO zapis.

$$f(a, b, c, d) = (a \cdot b \cdot c + (\bar{a} + \bar{b}) \cdot \bar{c}) \cdot (a + d)$$

Dobljeni izraz razširimo in vnesemo člen  $(a + d)$ :

$$f(a, b, c, d) = (a \cdot b \cdot c + \bar{a} \cdot \bar{c} + \bar{b} \cdot \bar{c}) \cdot (a + d)$$

$$f(a, b, c, d) = a \cdot b \cdot c \cdot (a + d) + \bar{a} \cdot \bar{c} \cdot (a + d) + \bar{b} \cdot \bar{c} \cdot (a + d)$$

Uporabimo lastnosti Boole-ove logike  $x \cdot \bar{x} = 0$  in  $x \cdot x = x$  in dobimo končni DNO izraz:

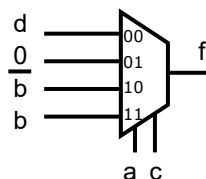
$$f(a, b, c, d) = a \cdot b \cdot c + \bar{a} \cdot \bar{c} \cdot d + a \cdot \bar{b} \cdot \bar{c} + \bar{b} \cdot \bar{c} \cdot d$$

Člene dobljene DNO izrišemo v Veitchev diagram:

		$a$			
$b$	$d$	0	1	0	0
		0	1	0	1
	$e$	1	0	0	1
		1	0	0	0
		$c$			

Dobljeni diagram analiziramo po vseh možnih kombinacijah naslovnih vhodov MUX 4/1. Pri vsaki kombinaciji poiščemo samo prvi neprimeren funkcijski ostanek ( $F_{XY}$ ), ki se ga ne da realizirati z eno spremenljivko, tako da opazovano kombinacijo nemudoma ovržemo:

Naslovni vhodi	$F_{00}$	$F_{01}$	$F_{10}$	$F_{11}$
ab	$d \cdot \bar{c}$	$d \cdot \bar{c} \cdot$		
ac	$d$	$0$	$\bar{b}$	$b$
ad	$0$	$\bar{c}$		$\bar{b} \oplus c$
bc	$a + d$		$\bar{a} \cdot \bar{d}$	
bd	$a \cdot \bar{c}$			$\overline{a \oplus c}$
cd	$\bar{b} \cdot a \cdot$			$a \cdot b$



Ustrezna kombinacija naslovnih vhodov izbiralnika 4/1 je  $ac$ , funkcijski ostanki so navedeni v zgornji tabeli. Realizacija z enim izbiralnikom 4/1 se nahaja na desni strani tabele.

Število  $2021_{21}=18565_{10}=4885_{16}$ =zapišemo v dvojiski obliki  $0100\ 1000\ 1000\ 0101_2$ . Vodilna ničla v zapisu nas ne zanima, zato jo lahko v zapisu začetne vrednosti v tabeli ne pišemo. Prve štiri pomike lahko preskočimo, saj do prvega prištevanja pride šele, ko prva '1' doseže vrednost  $1001_2$ .

[illegible]

Srečno 2021<sub>21</sub> 😊!