

RAZVOJ DIGITALNIH SISTEMOV

1. kolokvij
14. 12. 2017

1. Izrazite podano logično funkcijo samo s Piercevimi operatorji. Morebitne negacije realizirajte s Piercevim operatorjem.

$$f(a, b, c) = ((a \cdot c) \downarrow \bar{b}) \oplus (a \uparrow c)$$

2. Določite redundance podane funkcije f tako, da bo nastala funkcija linearna, izračunajte koeficiente linearnosti ter funkcijo izrazite z uporabo izračunanih koeficientov.

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = V(0, 5, 6, 9, 10, 12) \text{ in } V_x(3, 15)$$

3. Realizirajte podano funkcijo f z redundantnimi makstermi z enim izbiralnikom 4/1.

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = \&(1, 2, 5 - 7, 9, 10, 14) \text{ in } \&_x(0, 4, 11, 13)$$

4. Pretvorite število $8216_{10} = 2018_{16}$ v BCD zapis z uporabo "double dabble" algoritma.

Rešitev 1. naloge

Realizacija s samimi Piercevimi (NOR, oziroma \downarrow) operatorji zahteva pretvorbo funkcije v disjunktivno obliko (po možnosti normalno).

$$f(a, b, c) = ((a \cdot c) \downarrow \bar{b}) \oplus (a \uparrow c)$$

V ta namen moramo najprej operatorje (XOR, Pierce, Sheffer) v podani funkciji izpisati z disjunkcijami in konjunkcijami - začnemo na najvišjem nivoju, pri XOR funkciji in jo izpišemo. Obenem izpišemo še Shefferjev (NAND) operator. pri čemer izničimo nastalo dvojno negacijo zadnjega člena:

$$f(a, b, c) = ((a \cdot c) \downarrow \bar{b}) \cdot (a \cdot c) + ((a \cdot c) \downarrow \bar{b}) \cdot (a \cdot c)$$

Iz dobljene oblike izpišemo še oba Pierceva (NOR) operatorja.

$$f(a, b, c) = ((a \cdot c) + \bar{b}) \cdot (a \cdot c) + ((a \cdot c) + \bar{b}) \cdot (a \cdot c)$$

V prvem členu smo izničili dvojno negacijo, v drugem pa uporabimo de Morganov teorem nad predzadnjim členom in dobimo:

$$f(a, b, c) = ((a \cdot c) \cdot \overline{(a \cdot c)} + \bar{b} \cdot \overline{(a \cdot c)}) + ((a \cdot c) + \bar{b}) \cdot (a \cdot c)$$

Konjunkcija prvih dveh členov je nič, nad preostankom ponovno uporabimo de Morganov teorem, pri čemer izničimo nastalo dvojno negacijo nad členom b :

$$f(a, b, c) = \bar{b} \cdot (\bar{a} + \bar{c}) + \overline{(a \cdot c)} \cdot b \cdot (a \cdot c)$$

Iz izpisanega sledi, da je tudi zadnji člen enak 0, zato se izraz poenostavi v disjunktivno normalno obliko (DNO):

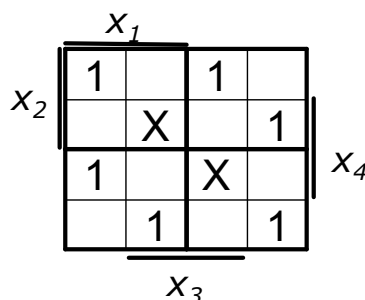
$$f(a, b, c) = \bar{b} \cdot (\bar{a} + \bar{c}) = \bar{a} \cdot \bar{b} + \bar{b} \cdot \bar{c}$$

Nad členoma DNO ponovno uporabimo de Morganov teorem, da izrazimo prvi nivo s Piercevim operatorjem. V zgornjem izrazu nad vmesno konjukcijo izvedemo z dvojno negacijo:

$$f(a, b, c) = \bar{b} \cdot (\bar{a} + \bar{c}) = \overline{\overline{\bar{b} \cdot (\bar{a} + \bar{c})}} = b \downarrow (\bar{a} \downarrow \bar{c}) = b \downarrow ((a \downarrow a) \downarrow (c \downarrow c))$$

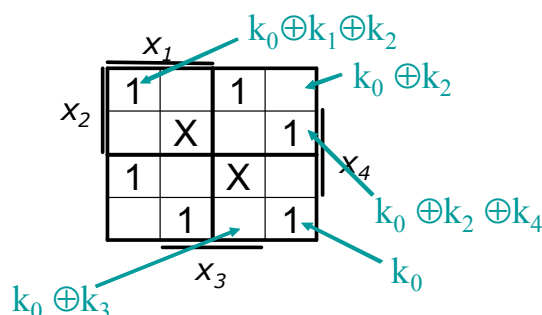
Rešitev 2. naloge:

Funkcijo najprej izrišemo v Veitchev diagram:



Če bo funkcija linearna, jo bomo lahko realizirali s pomočjo XOR funkcij. Linearnost funkcije ugotavljamo tako, da prepogibamo kvadrate diagrama: Začnemo v desnem spodnjem kotu (kjer je minterm 0) in prepognemo kvadrat navzgor, da se spremeni samo ena spremenljivka naenkrat (x_4 postane 0 v prvi iteraciji).

Opazujemo, ali se prepogne na novi kvadrat čisto enako ali pa popolnoma negirano. Če postavimo obe redundanci na '1', lahko s prepogibanjem ugotovimo, da je funkcija linearna.



Podana funkcija je funkcija 4 spremenljivk, zato lahko njeno splošno izražavo kot linearno funkcijo pišemo kot:

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = k_0 \oplus k_1 x_1 \oplus k_2 x_2 \oplus k_3 x_3 \oplus k_4 x_4$$

S pomočjo Veitch-evega diagrama izračunamo koeficiente.

Iz enačb sledi: $k_0=1$ in $k_0 \oplus k_3=0$, kar pomeni $1 \oplus k_3=0 \rightarrow k_3=1$.

In če napišemo še enačbo za $k_0 \oplus k_2=0$, kar pomeni $1 \oplus k_2=0$ sledi da je $k_2=1$.

Iz enačbe $k_0 \oplus k_2 \oplus k_4=1$, kar pomeni $1 \oplus 1 \oplus k_4=1 \rightarrow k_4=1$.

Analiziramo naprej in dobimo $k_0 \oplus k_1 \oplus k_2=1$, kar pomeni $1 \oplus k_1 \oplus 1=0 \rightarrow k_1=1$.

Vstavimo dobljene koeficiente v enačbo za splošno izražavo in dobimo:

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = 1 \oplus x_1 \oplus x_2 \oplus x_3 \oplus x_4$$

Čas pisanja je 60 minut. Vsaka naloga je vredna 10 točk.

Na list z rešitvami se podpišite in napišite še vpisno številko ter kateri predmet pišete.

Rezultati bodo objavljeni na domači strani predmeta.

Rešitev 3. naloge:

Funkcija f je podana v obliki PKNO z redundancami.

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = \&(1, 2, 5-7, 9, 10, 14) \text{ in } \&_x(0, 4, 11, 13)$$

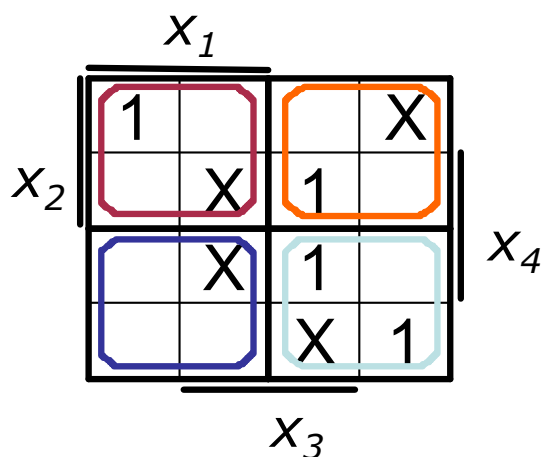
Za potrebe realizacije jo najprej pretvorimo v obliko PDNO. To storimo tako, da maksterme preslikamo v minterme. V pravilnostno tabelo funkcije najprej zapišemo številke mintermov (m) in pripadajoče številke makstermov (M). Vpišemo $f=0$ za vse maksterme in $f=X$ za vse redundantne maksterme. Na preostala mesta vpišemo $f=1$ in preberemo pri katerih mintermih je $f=1$ oz. $f=X$ ter funkcijo izrazimo v obliki PDNO.

| m | M | x_1 | x_2 | x_3 | x_4 | f |
|-----|-----|-------|-------|-------|-------|-----|
| 0 | 15 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| 1 | 14 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| 2 | 13 | 0 | 0 | 1 | 0 | X |
| 3 | 12 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| 4 | 11 | 0 | 1 | 0 | 0 | X |
| 5 | 10 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 |
| 6 | 9 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 |
| 7 | 8 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 8 | 7 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 9 | 6 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| 10 | 5 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| 11 | 4 | 1 | 0 | 1 | 1 | X |
| 12 | 3 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 |
| 13 | 2 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 |
| 14 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 |
| 15 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | X |

Dobimo:

$$f = V(0, 3, 7, 12) \text{ in } V_x(2, 4, 11, 15)$$

Dobljeno funkcijo vrišemo v Veitchev diagram. Ker iščemo najcenejšo realizacijo z izbiralnikom 4/1, bomo naredili razvoj po vseh kombinacijah naslovnih spremenljivk v Veitchevem diagramu. Če izberemo kot naslovni spremenljivki x_1 x_2 , potem dobimo:



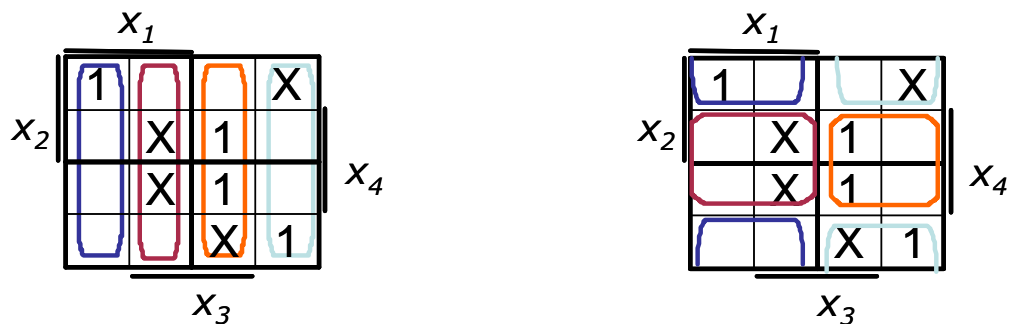
Čas pisanja je 60 minut. Vsaka naloga je vredna 10 točk.

Na list z rešitvami se podpišite in napišite še vpisno številko ter kateri predmet pišete.

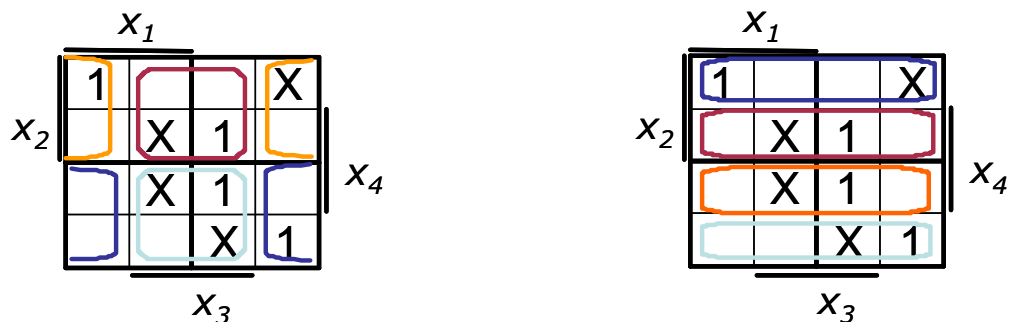
Rezultati bodo objavljeni na domači strani predmeta.

V zgornjem Veitchevem diagramu so označena vsa štiri polja funkcijskih ostankov, če izberemo vhodni spremenljivki x_1 x_2 . Zgornji levi kvadrat (rdeč) pomeni, da bo to polje izbrano ko bosta $x_1x_2="11"$, oranžni kvadrat ko bo $x_1x_2="01"$, temno modri ko bo $x_1x_2="10"$ in svetlo modri ko bo $x_1x_2="00"$. Vsakega od teh kvadratov poskušamo opisati s čimboli enostavno funkcijo: Vrednost zgornjega levega kvadrata je komplicirana, saj moramo vsako '1' opisati posebej: Za zgornjo '1' v tem kvadratu velja x_3x_4 . Če bi v tem kvadratu postavili redundanco na '1' jo bi opisali kot x_3x_4 . Funkcija bo torej $x_3x_4 + x_3x_4$, kar je enačba funkcije ekvivalence (XNOR). Podobno sklepanje velja za zgornji in spodnji desni kvadrat. Najbolj enostavna realizacija je spodnji levi kvadrat je konstanta '0', če postavimo redundanco na '0'. Za ostale možnosti realizacije moramo narisati še preostalih pet kombinacij dveh naslovnih vhodov.

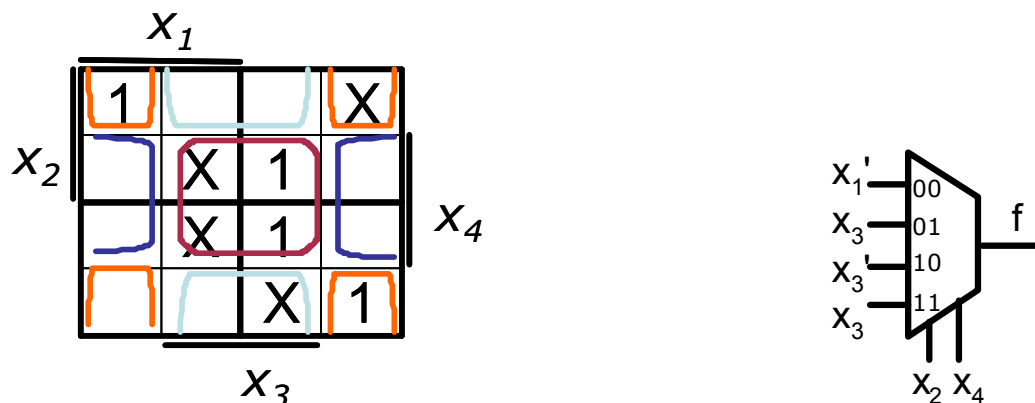
Če izberemo kot naslovni spremenljivki x_1 in x_3 , dobimo levi Veitchev diagram, če x_1 in x_4 , pa desnega. Podobno kot v prejšnjem primeru poiščemo realizacije ustreznih kvadratov in iščemo najenostavnejšo realizacijo: Izogibamo se veliko različnim funkcijam in iščemo inačice kvadratov, ki vsebujejo konstante (same '1' ali same '0'). Pri razvoju po x_1 in x_3 imamo pri $x_1x_3="10"$ najneugodnejšo funkcijo, saj vsebuje eno samo '1'. Pri razvoju po x_1 in x_4 nastopa ena sama '1' pri kombinaciji $x_1x_4="10"$.



Nato izberemo naslovni spremenljivki x_2 in x_3 , (levi diagram) in x_2 in x_4 (desni diagram). Pri razvoju po x_2 in x_3 imamo pri $x_2x_3="00"$ najneugodnejšo funkcijo (moder), saj vsebuje eno samo '1'. Pri razvoju po x_2 in x_4 nikjer nimamo osamljene '1', zato se dajo funkcijski ostanki enostavno realizirati, če vse redundance postavimo na '1'.



Zadnja kombinacija naslovnih vhodov je x_3 in x_4 . Pri razvoju po x_3 in x_4 imamo pri $x_3x_4="00"$ najneugodnejšo funkcijo (oranžen), saj dve '1' opišemo s funkcijo ekvivalence. Možno rešitev torej predstavlja kombinacija naslovnih vhodov x_2 in x_4 .



Vezje izbiralnika je v predlogah avditornih vaj na domači strani predmeta:

Logisim\MUX\mux_4_1_f_V_0_3_7_12_in_Vx_2_4_11_15.circ

Rešitev 4. naloge:

Število $8216_{10} = 2018_{16} = 0010\ 0000\ 0001\ 1000_2$.

Zapis posameznih števk v BCD zapisu se glasi: 1000 0010 0001 0110. Prve tri pomike smo v spodnji shemi preskočili, ker v tem primeru ne pride do prištevanja (100 ne povzroči prištevanja).

| | | | | | | | | |
|---------|---------|---------|---------|---------------------|---------|---------|---------|---------|
| | | | | 1 0 0 | 1 0 | 0 0 0 0 | 0 0 0 1 | 1 0 0 0 |
| | | | 1 0 0 | 0 0 0 0 0 0 | 1 1 0 0 | 0 | | |
| | | | 1 0 0 0 | 0 0 0 0 0 1 1 0 0 0 | | | | |
| | | | 1 0 1 1 | 0 0 0 0 0 1 1 0 0 0 | | | | |
| | | 1 | 0 1 1 0 | 0 0 0 0 1 1 0 0 0 | | | | |
| | | 1 | 1 0 0 1 | 0 0 0 0 1 1 0 0 0 | | | | |
| | | 1 1 | 0 0 1 0 | 0 0 0 1 1 0 0 0 | | | | |
| | | 1 1 0 | 0 1 0 0 | 0 0 1 1 0 0 0 | | | | |
| | | 1 0 0 1 | 0 1 0 0 | 0 0 1 1 0 0 0 | | | | |
| | 1 | 0 0 1 0 | 1 0 0 0 | 0 1 1 0 0 0 | | | | |
| | 1 | 0 0 1 0 | 1 0 1 1 | 0 1 1 0 0 0 | | | | |
| | 1 0 | 0 1 0 1 | 0 1 1 0 | 1 1 0 0 0 | | | | |
| | 1 0 | 1 0 0 0 | 1 0 0 1 | 1 1 0 0 0 | | | | |
| | 1 0 1 | 0 0 0 1 | 0 0 1 1 | 1 0 0 0 | | | | |
| | 1 0 0 0 | 0 0 0 1 | 0 0 1 1 | 1 0 0 0 | | | | |
| 1 | 0 0 0 0 | 0 0 1 0 | 0 1 1 1 | 0 0 0 | | | | |
| 1 | 0 0 0 0 | 0 0 1 0 | 1 0 1 0 | 0 0 0 | | | | |
| 1 0 | 0 0 0 0 | 0 1 0 1 | 0 1 0 0 | 0 0 | | | | |
| 1 0 | 0 0 0 0 | 1 0 0 0 | 0 1 0 0 | 0 0 | | | | |
| 1 0 0 | 0 0 0 1 | 0 0 0 0 | 1 0 0 0 | 0 | | | | |
| 1 0 0 | 0 0 0 1 | 0 0 0 0 | 1 0 1 1 | 0 | | | | |
| 1 0 0 0 | 0 0 1 0 | 0 0 0 1 | 0 1 1 0 | | | | | |

Srečno 2018 ☺ (šestnajstiško)!