

RAZVOJ DIGITALNIH SISTEMOV

1. kolokvij

11. 12. 2024

1. Izrazite podano logično funkcijo f samo s Shefferjevimi operatorji. Morebitne negacije realizirajte s Shefferjevim operatorjem.

$$f(x_1, x_2, x_3) = \overline{(x_1 \uparrow x_2) \cdot \bar{x}_3 + (x_1 \equiv x_3)}$$

2. Določite minimalno normalno obliko (MNO) funkcije f z uporabo diagramov za minimizacijo funkcij in COST funkcije. Dobljeno obliko MNO realizirajte z eno 4-bitno aritmetično-logično enoto (ALU). Negacije vhodnih spremenljivk izvedite z ALU.

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = \&(1, 3, 4, 6, 7, 14, 15) \text{ in } \&_x(0, 5, 10, 12, 13)$$

3. Realizirajte funkcijo f z enim izbiralnikom 4/1.

$$f(a, b, c, d) = \overline{(a \cdot b) \oplus c} \cdot (a + d)$$

4. Pretvorite število $2025_{15} = \mathbf{6785}_{10} = \mathbf{1A81}_{16}$ v BCD zapis z uporabo "double dabble" algoritma.

Rešitev 1. naloge

Realizacija s samimi Shefferjevimi (NAND, oziroma \uparrow) operatorji zahteva pretvorbo funkcije v minimalno disjunktivno (MDNO) ali minimalno konjunktivno obliko (MKNO).

$$f = \overline{(x_1 \uparrow x_2) \cdot \bar{x}_3 + (x_1 \equiv x_3)}$$

V ta namen moramo najprej operatorje (EQU, Sheffer) v podani funkciji izpisati z disjunkcijami in konjunkcijami. Izpišemo Shefferjev operator in ekvivalenco izrazimo v DNO obliki:

$$f = \overline{(\bar{x}_1 \cdot \bar{x}_2) \cdot \bar{x}_3 + (\bar{x}_1 \cdot \bar{x}_3 + x_1 \cdot x_3)}$$

Nad členom izpisanega Shefferjevega operatorja uporabimo De Morganov teorem:

$$f = \overline{(\bar{x}_1 + \bar{x}_2) \cdot \bar{x}_3 + (\bar{x}_1 \cdot \bar{x}_3 + x_1 \cdot x_3)}$$

Razširimo prvo konjunkcijo:

$$f = \overline{\bar{x}_1 \cdot \bar{x}_3 + \bar{x}_2 \cdot \bar{x}_3 + \bar{x}_1 \cdot \bar{x}_3 + x_1 \cdot x_3}$$

Člen $(\bar{x}_1 \cdot \bar{x}_3)$ se ponovi – uporabimo lastnost Booleove algebre $x + x = x$

$$f = \overline{\bar{x}_1 \cdot \bar{x}_3 + \bar{x}_2 \cdot \bar{x}_3 + x_1 \cdot x_3}$$

Celotna funkcija je negirana, nahaja se v DNO obliki, tako da lahko narišemo Veitchev diagram, v katerega vpisujemo ničle na mesta posameznih členov:

		x_1	
x_2		1	0
		0	0
		1	0
		0	0
		x_3	

Funkcijo spravimo v MDNO obliko z združevanjem preostalih členov (enice):

$$f = x_1 \cdot x_2 \cdot \bar{x}_3 + \bar{x}_1 \cdot x_3$$

Dobljeno obliko MDNO pretvorimo v same Shefferjeve operatorje z dvojno negacijo posameznih členov:

$$f = \overline{\overline{x_1 \cdot x_2 \cdot \bar{x}_3}} + \overline{\overline{\bar{x}_1 \cdot x_3}}$$

Nad zgornjima negacijama členov uporabimo De Morganov teorem ($\bar{x} + \bar{y} = \overline{x \cdot y}$):

$$f = \overline{\overline{x_1 \cdot x_2 \cdot \bar{x}_3} \cdot \overline{\bar{x}_1 \cdot x_3}}$$

Dobljeno obliko predstavimo s Shefferjevimi operatorji

$$f = (x_1 \uparrow x_2 \uparrow \bar{x}_3) \uparrow (\bar{x}_1 \uparrow x_3)$$

Negacije spremenljivk izrazimo z uporabo lastnosti ($x \uparrow x = \bar{x}$) in dobimo končni rezultat:

$$f = (x_1 \uparrow x_2 \uparrow (x_3 \uparrow x_3)) \uparrow ((x_1 \uparrow x_1) \uparrow x_3)$$

Rešitev 2. naloge:

Funkcija f je podana v obliki PKNO z redundancami:

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = \&(1, 3, 4, 6, 7, 14, 15) \text{ in } \&_x(0, 5, 10, 12, 13)$$

Najprej jo pretvorimo v obliko PDNO, da maksterme preslikamo v minterme. V pravilnostno tabelo funkcije najprej zapišemo številke mintermov (m) in pripadajoče številke makstermov (M). Vpišemo $f=0$ za vse maksterme in $f=X$ za vse redundantne maksterme. Na preostala mesta vpišemo $f=1$ in preberemo pri katerih mintermih je $f=1$ oz. $f=X$ ter funkcijo izrazimo v obliki PDNO.

Tabela mintermov in makstermov:

m	M	x_1	x_2	x_3	x_4	f
0	15	0	0	0	0	0
1	14	0	0	0	1	0
2	13	0	0	1	0	X
3	12	0	0	1	1	X
4	11	0	1	0	0	1
5	10	0	1	0	1	X
6	9	0	1	1	0	1
7	8	0	1	1	1	1
8	7	1	0	0	0	0
9	6	1	0	0	1	0
10	5	1	0	1	0	X
11	4	1	0	1	1	0
12	3	1	1	0	0	0
13	2	1	1	0	1	1
14	1	1	1	1	0	0
15	0	1	1	1	1	X

Funkcijo zapišemo v PDNO:

$$f = V(4, 6, 7, 13) \text{ in } V_x(2, 3, 5, 10, 15)$$

Dobljeno obliko minimiziramo v MDNO.

	x_1		x_2		
x_2	0	1	0	1	x_4
0	0	0	1	1	
1	1	X	1	X	
2	0	0	X	0	
3	0	X	X	0	

$$f_{MDNO} = \overline{x_1} \cdot x_2 + x_2 \cdot x_4$$

COST MDNO je (3, 6).

Podobno storimo za MKNO:

	x_1		x_2		
x_2	0	1	0	1	x_4
0	0	0	1	1	
1	1	X	1	X	
2	0	0	X	0	
3	0	X	X	0	

$$\overline{f} = \overline{x_2} + x_1 \cdot \overline{x_4}$$

Negacijo f prenesemo na desno stran enačbe.

$$f = \overline{\overline{x_2} + x_1 \cdot \overline{x_4}}$$

jo izpišemo ter dobimo MKNO:

$$f = x_2 \cdot (\overline{x_1} + x_4)$$

COST MKNO je (2, 4), torej velja MNO=MKNO.

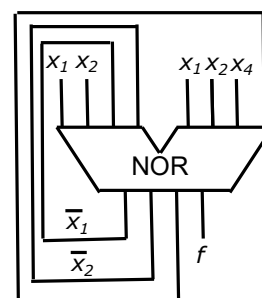
Za izražavo MKNO z NOR nad členom $x_1 \cdot \overline{x_4}$ uporabimo De Morganov teorem $\overline{x + y} = \overline{x} \cdot \overline{y}$:

$$f = \overline{\overline{x_2} + \overline{\overline{x_1} + x_4}}$$

Prepišemo operatorje in dobimo:

$$f = \overline{x_2} \downarrow (\overline{x_1} \downarrow x_4)$$

kar ob uporabi lastnosti $x \downarrow x = \overline{x}$ realiziramo z eno ALU:



MKNO lahko realiziramo tudi s Shefferjevimi operatorji, pri čemer izhajamo iz negacije funkcije:

$$\bar{f} = \bar{x}_2 + x_1 \cdot \bar{x}_4$$

Izvedemo dvojno negacijo nad posameznima členoma

$$\bar{f} = \overline{\bar{x}_2} + \overline{x_1 \cdot \bar{x}_4}$$

Uporabimo De Morganov teorem $\overline{x \cdot y} = \bar{x} + \bar{y}$:

$$\bar{f} = \overline{\bar{x}_2} + \overline{x_1 \cdot \bar{x}_4}$$

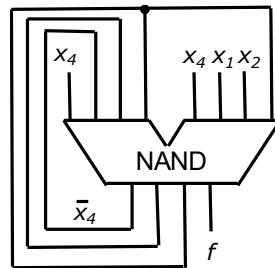
Dobljeno negacijo funkcije izrazimo s Shefferjevimi operatorji:

$$\bar{f} = x_2 \uparrow (x_1 \uparrow \bar{x}_4)$$

Z uporabo lastnosti $x \uparrow x = \bar{x}$ dobimo končni izraz:

$$f = \left(x_2 \uparrow (x_1 \uparrow (x_4 \uparrow x_4)) \right) \uparrow \left(x_2 \uparrow (x_1 \uparrow (x_4 \uparrow x_4)) \right)$$

Dobljeno funkcijo realiziramo z eno ALU:



Rešitev 3. naloge:

Funkcija f je podana v večnivojski (nenormalni) obliki:

$$f(a, b, c, d) = \overline{(a \cdot b)} \oplus c \cdot (a + d)$$

zato jo najprej poenostavimo z uporabo pravil Booleove logike. Izpišemo levi člen XOR operacije.

$$f(a, b, c, d) = \overline{(a \cdot b)} \oplus c \cdot (a + d) = (a \cdot b \cdot c + \overline{a \cdot b} \cdot \bar{c}) \cdot (a + d)$$

Uporabimo De Morganov teorem, da dobimo DNO zapis.

$$f(a, b, c, d) = (a \cdot b \cdot c + (\bar{a} + \bar{b}) \cdot \bar{c}) \cdot (a + d)$$

Dobljeni izraz razširimo in vnesemo člen $(a + d)$:

$$f(a, b, c, d) = (a \cdot b \cdot c + \bar{a} \cdot \bar{c} + \bar{b} \cdot \bar{c}) \cdot (a + d)$$

$$f(a, b, c, d) = a \cdot b \cdot c \cdot (a + d) + \bar{a} \cdot \bar{c} \cdot (a + d) + \bar{b} \cdot \bar{c} \cdot (a + d)$$

Uporabimo lastnosti Booleove logike $x \cdot \bar{x} = 0$ in $x \cdot x = x$ in dobimo končni DNO izraz:

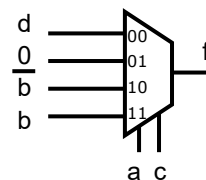
$$f(a, b, c, d) = a \cdot b \cdot c + \bar{a} \cdot \bar{c} \cdot d + a \cdot \bar{b} \cdot \bar{c} + \bar{b} \cdot \bar{c} \cdot d$$

Člene dobljene DNO izrišemo v Veitchev diagram:

		a			
b	d	0	1	0	0
		0	1	0	1
	e	1	0	0	1
		1	0	0	0
		c			

Dobljeni diagram analiziramo po vseh možnih kombinacijah naslovnih vhodov MUX 4/1. Pri vsaki kombinaciji poiščemo samo prvi neprimeren funkcijski ostanek (F_{XY}), ki se ga ne da realizirati z eno spremenljivko, tako da opazovano kombinacijo nemudoma ovržemo:

Naslovna vhoda	F_{00}	F_{01}	F_{10}	F_{11}
ab	$d \cdot \bar{c}$	$d \cdot \bar{c} \cdot$		
ac	d	0	\bar{b}	b
ad	0	\bar{c}		$\bar{b} \oplus c$
bc	$a + d$		$\bar{a} \cdot \bar{d}$	
bd	$a \cdot \bar{c}$			$\bar{a} \oplus c$
cd	$\bar{b} \cdot a$			$a \cdot b$



Ustrezna kombinacija naslovnih vhodov izbiralnika 4/1 je ac , funkcijski ostanki so navedeni v zgornji tabeli. Realizacija z enim izbiralnikom 4/1 se nahaja na desni strani tabele.

