

RAZVOJ DIGITALNIH SISTEMOV

1. kolokvij
16. 12. 2015

1. Določite minimalno konjunktivno normalno obliko (MKNO) in minimalno disjunktivno normalno obliko (MDNO) funkcije f z uporabo pravil Boole-ove logike in diagramov za minimizacijo funkcij.

$$f(a,b,c,d) = \overline{(a \cdot \bar{b} + b \cdot c \cdot \bar{d} + (b \oplus c)) \oplus ((a \uparrow c \uparrow d) \downarrow (\bar{c} + d))}$$

2. Realizirajte podano funkcijo f z redundancami z eno 4-bitno aritmetično-logično enoto (ALU). Negacije vhodnih spremenljivk izvedite z ALU.

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = V(1, 4, 5, 8, 9, 12, 15) \quad \text{in} \quad V_x(0, 7, 13, 14)$$

3. Realizirajte funkcijo f z enim izbiralnikom 4/1.

$$f(a,b,c,d) = \overline{(a \cdot b)} \oplus c \cdot (a + d)$$

4. Pretvorite število 197_{10} (11000101_2) v BCD zapis z uporabo "double dabble" algoritma.

Rešitev 1. naloge

Funkcije NOR (\downarrow), NAND (\uparrow) in XOR posameznih členov izpišemo. Srednjo ekvivalenco pustimo:

$$\begin{aligned} f(a,b,c,d) &= \overline{(a \cdot \bar{b} + b \cdot c \cdot \bar{d} + (b \oplus c)) \oplus ((a \uparrow c \uparrow d) \downarrow (\bar{c} + d))} \\ &= \overline{(a \cdot \bar{b} + b \cdot c \cdot \bar{d} + \bar{b} \cdot c + b \cdot \bar{c}) \oplus ((a \uparrow c \uparrow d) \downarrow (\bar{c} + d))} \\ &= \overline{(a \cdot \bar{b} + b \cdot c \cdot \bar{d} + \bar{b} \cdot c + b \cdot \bar{c}) \oplus ((\overline{a \cdot c \cdot d}) + (\bar{c} + d))} \end{aligned}$$

Nad desnim členom uporabimo De Morgan-ov teorem in ga zapišemo na novo:

$$\begin{aligned} f(a,b,c,d) &= \overline{(a \cdot \bar{b} + b \cdot c \cdot \bar{d} + \bar{b} \cdot c + b \cdot \bar{c}) \oplus (a \cdot c \cdot d \cdot (\bar{c} + d))} \\ &= \overline{(a \cdot \bar{b} + b \cdot c \cdot \bar{d} + \bar{b} \cdot c + b \cdot \bar{c}) \oplus (a \cdot c \cdot d \cdot \bar{c} \cdot \bar{d})} \end{aligned}$$

Uporabimo enakost: ($\bar{x} \cdot x = 0$), zato desni člen postane '0'.

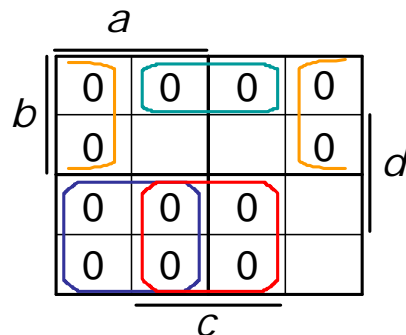
$$f(a,b,c,d) = \overline{(a \cdot \bar{b} + b \cdot c \cdot \bar{d} + \bar{b} \cdot c + b \cdot \bar{c}) \oplus 0}$$

Uporabimo lastnost XNOR operacije ($\overline{x \oplus 0} = \bar{x}$) in dobimo:

$$f = \overline{(a \cdot \bar{b} + b \cdot c \cdot \bar{d} + \bar{b} \cdot c + b \cdot \bar{c})}$$

Negacijo prenesemo na stran f . Dobimo izraz v DNO, katerega člene vpisujemo kot ničle v Veitch-ev diagram:

$$\bar{f} = a \cdot \bar{b} + b \cdot c \cdot \bar{d} + \bar{b} \cdot c + b \cdot \bar{c}$$



Iz diagrama lahko zapišemo obliko MDNO tako, da združujemo '1':

$$f_{MDNO} = \bar{a} \cdot \bar{b} \cdot \bar{c} + b \cdot c \cdot d$$

MKNO dobimo tako, da v Veitch-evem diagramu združujemo '0' in dobimo negacijo DNO členov, nakar uporabimo dvakrat De Morgan-ov teorem, da dobljeno negacijo pretvorimo v MKNO:

$$\begin{aligned} \bar{f} &= a \cdot \bar{b} + c \cdot \bar{d} + \bar{b} \cdot c + b \cdot \bar{c} \\ f &= \overline{a \cdot \bar{b} + c \cdot \bar{d} + \bar{b} \cdot c + b \cdot \bar{c}} \\ f &= \overline{a \cdot \bar{b} \cdot c \cdot \bar{d} \cdot \bar{b} \cdot c \cdot b \cdot \bar{c}} \\ f_{MKNO} &= (\bar{a} + b) \cdot (\bar{c} + d) \cdot (b + \bar{c}) \cdot (\bar{b} + c) \end{aligned}$$

Čas pisanja je 60 minut. Vsaka naloga je vredna 10 točk. Na list z rešitvami se podpišite in napišite še vpisno številko ter kateri predmet pišete. Rezultati bodo objavljeni na domači strani predmeta.

Rešitev 2. naloge:

Aritmetično–logično enota lahko poleg aritmetičnih naenkrat realizira štiri dvovhodne logične operacije *istega tipa* (OR, AND, NOT, NOR, NAND, XOR, XNOR), zato nas zanima realizacija zgornje funkcije z dvovhodnimi operatorji enega tipa. Funkcijo izrišemo v Veitch–ev diagram:

	x_1		
x_2	1	X	1
	X	1	X
	1		1
	1		X
	x_3		x_4

Funkcijo zapišemo v obliko DNO, tako da za vse redundance postavimo na '1' razen minterma m_{14} , ki ga postavimo na '0'.

$$f = \overline{x_3} + x_2 \cdot x_4$$

Dobljeno funkcijo lahko zapišemo v NAND obliki (Sheffer-jev operator), tako da funkcijo dvakrat negiramo:

$$f = \overline{x_3} + x_2 \cdot x_4 = \overline{\overline{\overline{x_3} + x_2 \cdot x_4}} = \overline{\overline{x_3} \cdot \overline{x_2 \cdot x_4}}$$

$$f = x_3 \uparrow (x_2 \uparrow x_4)$$

Druga možna rešitev je v smeri na Piercevega operatorja (NOR):

$$\overline{f} = \overline{x_2} \cdot x_3 + x_3 \cdot \overline{x_4} =$$

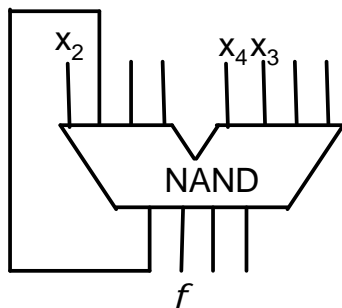
$$f = \overline{\overline{x_2} \cdot x_3 + x_3 \cdot \overline{x_4}}$$

$$f = \overline{\overline{x_2} + \overline{x_3} + x_3 + \overline{x_4}} = (x_2 \downarrow \overline{x_3}) \downarrow (\overline{x_3} \downarrow x_4)$$

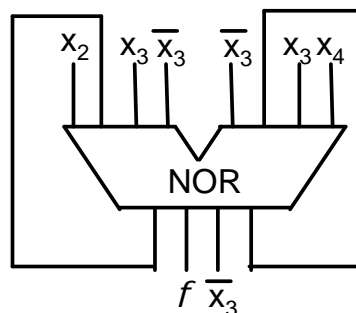
Aritmetično–logično enoto nastavimo tako, da bo izvajala štirikratno dvovhodno NAND operacijo in vhod prvega člena ($x_2 \uparrow x_4$) vežemo nazaj ter tvorimo NAND z x_3 .

Naloga zahteva izvajanje negacij z uporabo ALU, zato negacijo spremenljivke x_3 v primeru realizacije z NOR operatorji izvedemo z uporabo lastnosti: $\overline{x_3} = x_3 \downarrow 0 = x_3 \downarrow x_3$.

$$f = x_3 \uparrow (x_2 \uparrow x_4)$$



$$f = (x_2 \downarrow \overline{x_3}) \downarrow (\overline{x_3} \downarrow x_4)$$



Rešitev 3. naloge:

Funkcija f je podana v večnivojski (nenormalni) obliki:

$$f(a,b,c,d) = \overline{(a \cdot b)} \oplus c \cdot (a + d)$$

zato jo najprej poenostavimo z uporabo pravil Boole-ove logike. Izpišemo levi člen XOR operacije.

$$f(a,b,c,d) = \overline{(a \cdot b)} \oplus c \cdot (a + d) = (a \cdot b \cdot c + \overline{a \cdot b} \cdot \bar{c}) \cdot (a + d)$$

Uporabimo De Morganov teorem, da dobimo DNO zapis.

$$f(a,b,c,d) = (a \cdot b \cdot c + \overline{a \cdot b} \cdot \bar{c}) \cdot (a + d) = (a \cdot b \cdot c + (\bar{a} + \bar{b}) \cdot \bar{c}) \cdot (a + d)$$

Dobljeni izraz razširimo in vnesemo člen $a + d$:

$$\begin{aligned} f(a,b,c,d) &= (a \cdot b \cdot c + (\bar{a} + \bar{b}) \cdot \bar{c}) \cdot (a + d) = \\ &= (a \cdot b \cdot c + \bar{a} \cdot \bar{c} + \bar{b} \cdot \bar{c}) \cdot (a + d) \\ &= a \cdot b \cdot c \cdot (a + d) + \bar{a} \cdot \bar{c} \cdot (a + d) + \bar{b} \cdot \bar{c} \cdot (a + d) \end{aligned}$$

Uporabimo lastnosti Boole-ove logike $x \cdot \bar{x} = 0$ in $x \cdot x = x$ in dobimo končni DNO izraz:

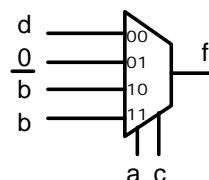
$$\begin{aligned} f(a,b,c,d) &= a \cdot b \cdot c \cdot (a + d) + \bar{a} \cdot \bar{c} \cdot (a + d) + \bar{b} \cdot \bar{c} \cdot (a + d) \\ f(a,b,c,d) &= a \cdot b \cdot c \cdot a + a \cdot b \cdot c \cdot d + \bar{a} \cdot \bar{c} \cdot a + \bar{a} \cdot \bar{c} \cdot d + a \cdot \bar{b} \cdot \bar{c} \cdot a + a \cdot \bar{b} \cdot \bar{c} \cdot d = \\ f(a,b,c,d) &= a \cdot b \cdot c + \bar{a} \cdot \bar{c} \cdot d + a \cdot \bar{b} \cdot \bar{c} \cdot d \end{aligned}$$

Člene dobljene DNO izrišemo v Veitchev diagram:

		a			
b	d	0	1	0	0
		0	1	0	1
	e	1	0	0	1
		1	0	0	0
		c			

Dobljeni diagram analiziramo po vseh možnih kombinacijah naslovnih vhodov MUX 4/1. Pri vsaki kombinaciji poiščemo samo prvi neprimeren funkcijski ostanek (F_{XY}), ki se ga ne da realizirati z eno spremenljivko, tako da opazovano kombinacijo nemudoma ovržemo:

Naslovni vhodi	F_{00}	F_{01}	F_{10}	F_{11}
ab	osamljena '1'	osamljena '1'		
ac	d	0	not(b)	b
ad				b xnor c
bc			osamljena '1'	
bd	osamljena '1'			a xnor c
cd				osamljena '1'



Ustrezna kombinacija naslovnih vhodov izbiralnika 4/1 je ac , funkcijski ostanki so navedeni v zgornji tabeli. Realizacija z enim izbiralnikom 4/1 se nahaja na desni strani tabele.

Rešitev 4. naloge:

Število $197_{10} = 11000101_2$. Zapis posameznih števk v BCD zapisu se glasi: 0001 1001 0111.

STOTICE				DESETICE				ENICE												
												1	1	0	0	0	1	0	1	START
										1		1	0	0	0	1	0	1		POMIK1
									1	1		0	0	0	1	0	1			POMIK2
									1	1	0	0	0	1	0	1				POMIK3
								1	0	0	1	0	0	1	0	1				ADD3
							1	0	0	1	0	0	1	0	1					POMIK4
						1	0	0	1	0	0	1	0	1						POMIK5
					1	0	0	1	0	0	1	0	1							ADD3
					1	0	0	1	1	0	0	0	1							POMIK6
				1	0	0	1	1	0	0	0	1								ADD3
				1	1	0	0	1	0	1	1	1								POMIK7
			1	1	0	0	1	0	1	1	1									POMIK8
1_{10}				9_{10}				7_{10}												

Čas pisanja je 60 minut. Vsaka naloga je vredna 10 točk. Na list z rešitvami se podpišite in napišite še vpisno številko ter kateri predmet pišete. Rezultati bodo objavljeni na domači strani predmeta.