

RAZVOJ DIGITALNIH SISTEMOV

1. kolokvij

15. 12. 2022

1. Realizirajte funkcijo f v obliki PDNO z redundancami s čim manj izbiralniki 4/1.

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = V(1, 2, 9, 13, 15) \text{ in } V_x(0, 5, 11, 12)$$

2. Realizirajte podano funkcijo f v obliki PKNO z redundantnimi makstermi z eno 4-bitno aritmetično-logično enoto (ALU). Vse dobljene negacije vhodnih spremenljivk izvedite z ALU.

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = \&(1, 3, 4, 6, 7, 14, 15) \text{ in } \&_x(0, 5, 10, 12, 13)$$

3. Določite redundance podane funkcije f tako, da bo nastala funkcija linearna, izračunajte koeficiente linearnosti ter funkcijo izrazite z uporabo izračunanih koeficientov.

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = V(0, 5, 6, 9, 10, 12) \text{ in } V_x(3, 15)$$

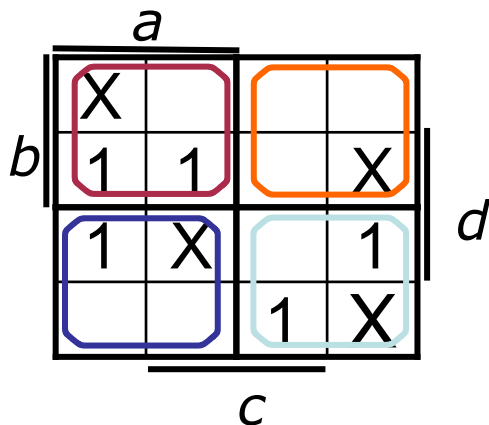
4. Pretvorite število $2023_{23} = 24383_{10} = 5F3F_{16}$ v BCD zapis z uporabo "double dabble" algoritma.

Rešitev 1. naloge:

Funkcija f je podana v obliki PDNO z redundancami.

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = V(1, 2, 9, 13, 15) \text{ in } V_x(0, 5, 11, 12)$$

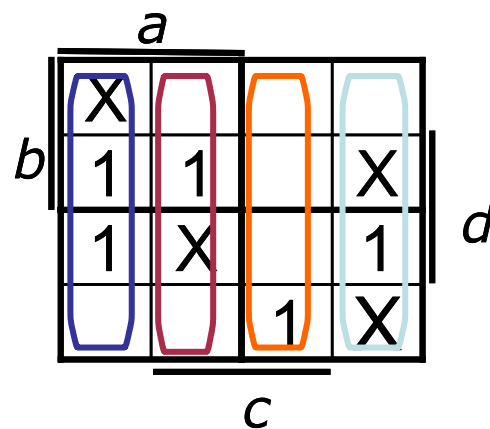
Dobljeno funkcijo vrišemo v Veitchev diagram. Ker iščemo najcenejšo realizacijo z izbiralnikom 4/1, bomo naredili razvoj po vseh kombinacijah naslovnih spremenljivk v Veitchevem diagramu. Če izberemo kot naslovni spremenljivki a in b , potem dobimo:



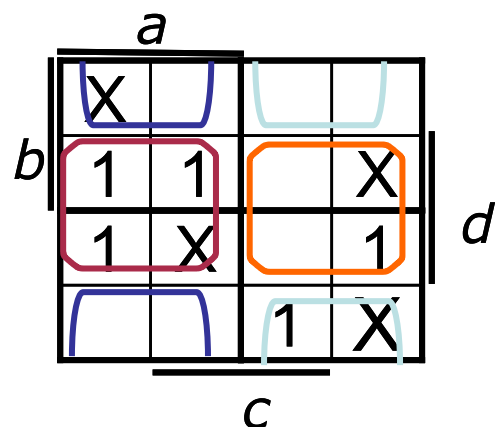
V zgornjem Veitchevem diagramu so označena vsa štiri polja štirih mintermov, če izberemo vhodni spremenljivki a in b . Zgornji levi kvadrat (rdeč) pomeni, da bo to polje izbrano ko bosta $ab="11"$, oranžni kvadrat ko bo $ab="01"$, temno modri ko bo $ab="10"$ in svetlo modri ko bo $ab="00"$. Vsakega od teh kvadratov poskušamo opisati s čimbolj enostavno funkcijo: Vrednost zgornjega levega kvadrata opišemo s spremenljivko d , če postavimo redundanco na '0'. Vrednost spodnjega desnega kvadrata je bolj komplicirana, saj moramo vsako '1' opisati posebej: Za zgornjo '1' v tem kvadratu velja $c \cdot d$, za spodnjo '1' pa $c \cdot d'$. Funkcija bo torej $c \cdot d + c \cdot d'$, kar je enačba funkcije XOR. Najbolj enostavna realizacija je zgornji desni kvadrat, ki je kar '0', če postavimo redundanco na '0'. Zato, da bi pregledali še ostale možnosti, moramo narisati še preostalih pet kombinacij dveh naslovnih vhodov.

Če izberemo kot naslovni spremenljivki a in c , dobimo levi Veitchev diagram, če a in d ,

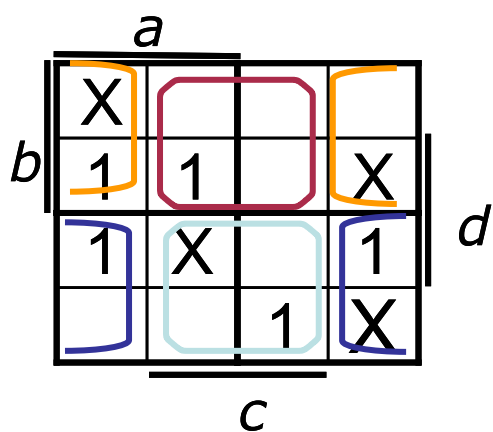
pa desnega. Podobno kot v prejšnjem primeru poiščemo realizacije ustreznih kvadratov in iščemo najcenejšo realizacijo: Izogibamo se veliko različnim funkcijam in iščemo drugače kvadratov, ki vsebujejo same '1' ali same '0'. Pri razvoju po a in c imamo pri $ac="01"$ najneugodnejšo funkcijo, saj vsebuje eno samo '1'.



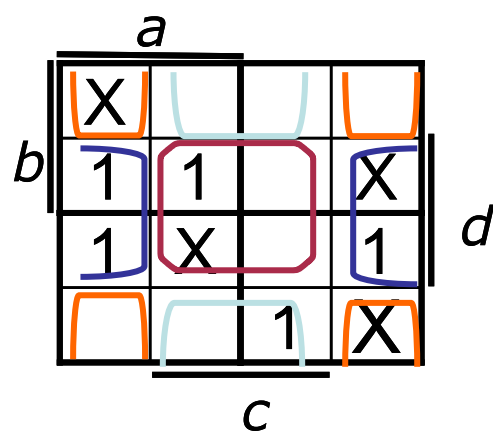
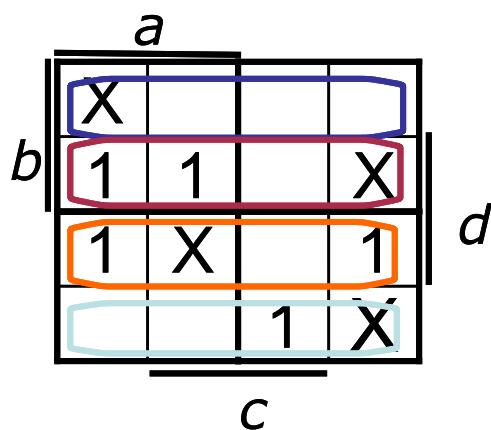
Pri razvoju po a in d nikjer ne nastopa ena sama '1' ali tri '1' ali diagonala (XOR) dveh '1'.



Nato izberemo naslovni spremenljivki b in c , (levi Veitchev diagram) in b in d (desni diagram). Pri razvoju po b in c imamo pri $bc="11"$ najneugodnejšo funkcijo (rdeč), saj vsebuje eno samo '1'.

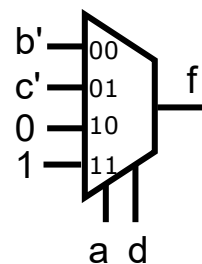


Pri razvoju po b in d dobimo eno (od dveh) možno realizacijo s funkcijskimi ostanki: $F_{00}=a'$; $F_{01}=c'$; $F_{10}=0$ in $F_{11}=a$.



Zadnja kombinacija naslovnih vhodov je cd . Pri razvoju po c in d imamo pri $cd="10"$ najneugodnejšo funkcijo (svetlo moder), saj vsebuje eno samo '1'. Najbolj ugodna kombinacija za realizacijo je torej razvoj po spremenljivkah a in d .

Končna realizacija funkcije je lahko:



Druga možna rešitev je kombinacija naslovnih spremenljivk b in d .

Rešitev 2. naloge:

Funkcija f je podana v obliki PKNO z redundancami:

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = \&(1, 3, 4, 6, 7, 14, 15) \text{ in } \&_x(0, 5, 10, 12, 13)$$

Najprej jo pretvorimo v obliko PDNO, da maksterme preslikamo v minterme. V pravilnostno tabelo funkcije najprej zapišemo številke mintermov (m) in pripadajoče številke makstermov (M). Vpišemo $f=0$ za vse maksterme in $f=X$ za vse redundantne maksterme. Na preostala mesta vpišemo $f=1$ in preberemo pri katerih mintermih je $f=1$ oz. $f=X$ ter funkcijo izrazimo v obliki PDNO.

Tabela mintermov in makstermov:

m	M	x_1	x_2	x_3	x_4	f
0	15	0	0	0	0	0
1	14	0	0	0	1	0
2	13	0	0	1	0	X
3	12	0	0	1	1	X
4	11	0	1	0	0	1
5	10	0	1	0	1	X
6	9	0	1	1	0	1
7	8	0	1	1	1	1
8	7	1	0	0	0	0
9	6	1	0	0	1	0
10	5	1	0	1	0	X
11	4	1	0	1	1	0
12	3	1	1	0	0	0
13	2	1	1	0	1	1
14	1	1	1	1	0	0
15	0	1	1	1	1	X

Funkcijo zapišemo v PDNO:

$$f = V(4, 6, 7, 13) \text{ in } V_x(2, 3, 5, 10, 15)$$

Funkcijo minimiziramo v MDNO.

x_1	x_2	x_3	x_4
0	0	1	1
1	X	1	X
0	0	X	0
0	X	X	0

$$f_{MDNO} = \overline{x_1} \cdot x_2 + x_2 \cdot x_4$$

Izpostavimo x_2 ter dvakrat negiramo:

$$f = \overline{x_2}(\overline{x_1} + x_4)$$

Uporabimo De Morganov teorem s prvo negacijo in dobimo:

$$f = \overline{x_2} + \overline{x_1} + x_4$$

Dobljeno funkcijo zapišemo s Piercevimi operatorji:

$$f = \overline{x_2} \downarrow (\overline{x_1} \downarrow x_4)$$

Podobno storimo za MKNO:

x_1	x_2	x_3	x_4
0	0	1	1
1	X	1	X
0	0	X	0
0	X	X	0

$$\overline{f} = \overline{x_2} + x_1 \cdot \overline{x_4}$$

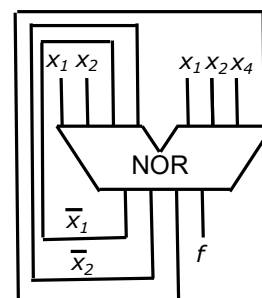
Levo in desno stran enačbe negiramo še enkrat, da se negacija prenese na desno stran enačbe.

$$f = \overline{x_2} + x_1 \cdot \overline{x_4}$$

Nad členom $x_1 \cdot \overline{x_4}$ uporabimo De Morganov teorem $\overline{x + y} = \overline{x} \cdot \overline{y}$:

$$f = \overline{x_2} + \overline{x_1} + x_4$$

Dobimo enako funkcijo kot prej (Piercevimi operatorji), kar realiziramo z eno ALU:



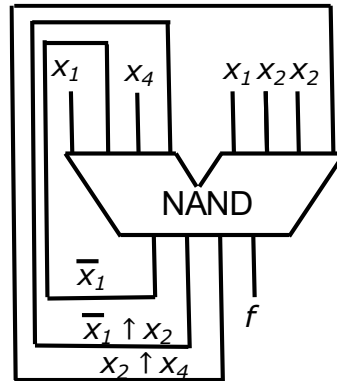
Pri realizaciji s realizacijo s Shefferjevimi operatorji lahko celotno MDNO funkcijo dvakrat negiramo:

$$f_{MDNO} = \overline{\overline{\overline{x_1} \cdot x_2 + x_2 \cdot x_4}}$$

Enkrat uporabimo DeMorganov teorem in dobimo:

$$f_{MDNO} = (\overline{x_1} \uparrow x_2) \uparrow (x_2 \uparrow x_4)$$

Dobljeno funkcijo realiziramo z eno ALU:



Za realizacijo s Shefferjevimi operatorji lahko izhajamo tudi iz negacije funkcije:

$$\overline{f} = \overline{x_2} + x_1 \cdot \overline{x_4}$$

Izvedemo dvojno negacijo nad posameznima členoma

$$\overline{f} = \overline{\overline{\overline{x_2}} + \overline{\overline{x_1} \cdot \overline{x_4}}}$$

Uporabimo De Morganov teorem $\overline{x \cdot y} = \overline{x} + \overline{y}$:

$$\overline{f} = \overline{x_2 \cdot x_1 \cdot \overline{x_4}}$$

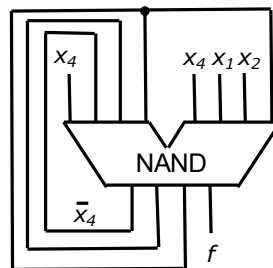
Dobljeno negacijo funkcije izrazimo s Shefferjevimi operatorji:

$$\overline{f} = x_2 \uparrow (x_1 \uparrow \overline{x_4})$$

Z uporabo lastnosti $x \uparrow x = \overline{x}$ dobimo končni izraz:

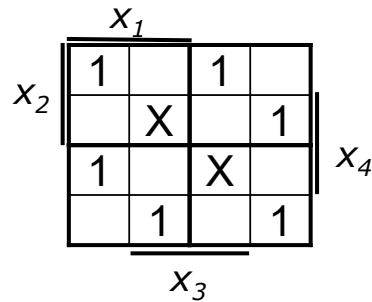
$$f = \left(x_2 \uparrow (x_1 \uparrow (x_4 \uparrow x_4)) \right) \uparrow \left(x_2 \uparrow (x_1 \uparrow (x_4 \uparrow x_4)) \right)$$

Dobljeno funkcijo realiziramo z eno ALU:



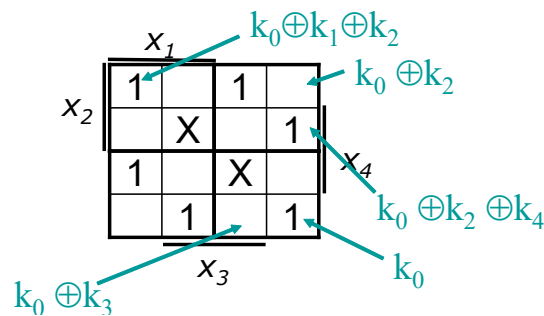
Rešitev 2. naloge:

Funkcijo najprej izrišemo v Veitchev diagram:



Če bo funkcija linearna, jo bomo lahko realizirali s pomočjo XOR funkcij. Linearnost funkcije ugotavljamo tako, da prepogibamo kvadrate diagrama: Začnemo v desnem spodnjem kotu (kjer je minterm 0) in prepognemo kvadrat navzgor, da se spremeni samo ena spremenljivka naenkrat (x_4 postane 0 v prvi iteraciji).

Opazujemo, ali se prepogne na novi kvadrat čisto enako ali pa popolnoma negirano. Če postavimo obe redundanci na '1', lahko s prepogibanjem ugotovimo, da je funkcija linearna.



Podana funkcija je funkcija 4 spremenljivk, zato lahko njeno splošno izražavo kot linearno funkcijo pišemo kot:

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = k_0 \oplus k_1 x_1 \oplus k_2 x_2 \oplus k_3 x_3 \oplus k_4 x_4$$

S pomočjo Veitchevega diagrama izračunamo koeficiente.

Iz enačb sledi: $k_0=1$ in $k_0 \oplus k_3=0$, kar pomeni $1 \oplus k_3=0 \rightarrow k_3=1$.

In če napišemo še enačbo za $k_0 \oplus k_2=0$, kar pomeni $1 \oplus k_2=0$ sledi da je $k_2=1$.

Iz enačbe $k_0 \oplus k_2 \oplus k_4=1$, kar pomeni $1 \oplus 1 \oplus k_4=1 \rightarrow k_4=1$.

Analiziramo naprej in dobimo $k_0 \oplus k_1 \oplus k_2=1$, kar pomeni $1 \oplus k_1 \oplus 1=0 \rightarrow k_1=1$.

Vstavimo dobljene koeficiente v enačbo za splošno izražavo in dobimo:

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = 1 \oplus x_1 \oplus x_2 \oplus x_3 \oplus x_4$$

Rešitev 4. naloge:

Število $2023_{23} = 24383_{10} = 5F3F_{16}$ zapišemo v dvojiški obliki $0101\ 1111\ 0011\ 1111_2$. Vodilna ničla v zapisu nas ne zanima, zato jo lahko v zapisu začetne vrednosti v tabeli ne pišemo. Prve tri pomike lahko preskočimo, saj do prvega prištevanja pride šele, ko prva '1' doseže vrednost 0101_2 .

					1 0 1	1 1 1 1	0 0 1 1	1 1 1 1
				1 0 1	1 1 1 1 0 0 1 1 1 1 1			
				1 0 0 0	1 1 1 1 0 0 1 1 1 1 1			
			1	0 0 0 1	1 1 1 0 0 1 1 1 1 1			
			1 0	0 0 1 1	1 1 0 0 1 1 1 1 1			
			1 0 0	0 1 1 1	1 0 0 1 1 1 1 1			
			1 0 0	1 0 1 0	1 0 0 1 1 1 1 1			
			1 0 0 1	0 1 0 1	0 0 1 1 1 1 1			
			1 1 0 0	1 0 0 0	0 0 1 1 1 1 1			
		1	1 0 0 1	0 0 0 0	0 1 1 1 1 1			
		1	1 1 0 0	0 0 0 0	0 1 1 1 1 1			
		1 1	1 0 0 0	0 0 0 0	1 1 1 1 1			
		1 1	1 0 1 1	0 0 0 0	1 1 1 1 1			
		1 1 1	0 1 1 0	0 0 0 1	1 1 1 1			
		1 0 1 0	1 0 0 1	0 0 0 1	1 1 1 1			
		1	1 0 0 0	0 0 1 0	1 1 1 1			
		1 1	0 0 0 0	0 1 0 0	1 1 1			
		1 1	0 0 0 0	1 0 0 1	1 1			
		1 1 0	0 0 0 0	1 1 0 0	1 1			
		1 0 0 1	0 0 0 1	1 0 0 1	1			
		1 0 0 1	0 0 0 1	1 1 0 0	1			
1 0	0 1 0 0	0 0 1 1	1 0 0 0	0 0 1 1				
2	4	3	8	3				

Zapis posameznih števk rezultata v BCD zapisu (24383_{10}) se glasi: 0010 0100 0011 1000 0011.

Srečno 2023_{23} ☺!