

RAZVOJ DIGITALNIH SISTEMOV

1. kolokvij
18. 12. 2014

1. Določite popolno konjunktivno normalno obliko (PKNO) in popolno disjunktivno normalno obliko (PDNO) funkcije f z uporabo pravil Boole-ove logike.

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 \downarrow x_2) \cdot \overline{x_3} + ((\overline{x_2} \equiv x_4) \downarrow \overline{x_1})$$

2. Realizirajte podano funkcijo f z redundancami z eno 4-bitno aritmetično-logično enoto (ALU). Negacije vhodnih spremenljivk izvedite z ALU.

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = V(0, 5, 6, 9, 10, 12) \quad \text{in} \quad V_x(3, 15)$$

3. Z uporabo "carry lookahead" načina seštevanja seštejte števili x in y . Na vseh mestih določite vrednosti funkcij tvorjenja (g_i) in širjenja (p_i). Končni rezultat izračunajte z uporabo prenosov (c_i), ki izvirajo iz pomočjo funkcij (g_i) in (p_i), ter vhodnih operandov x in y .

$$x + y = 23_{10} + 45_{10} = 68_{10}$$

4. Realizirajte funkcijo f z enim izbiralnikom 4/1.

$$f(a, b, c, d) = (a \cdot \overline{b} + b \cdot c \cdot \overline{d} + b \cdot c) \cdot ((a \cdot c \cdot d) \cdot (\overline{c} + d))$$

DEVELOPMENT OF DIGITAL SYSTEMS

Midterm Examination

18. 12. 2014

1. Determine the minimal normal form (MNO) of a given incompletely specified function f . Write the *complete* POS (product-of-sums) and *complete* SOP (sum-of-products) form of a given function f using Boolean algebra rules.

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 \downarrow x_2) \cdot \overline{x_3} + ((\overline{x_2} \equiv x_4) \downarrow \overline{x_1})$$

2. Implement the incompletely specified function f using a single four bit arithmetic logic unit (ALU). All possible variable negations have to be implemented using this ALU.

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = V(0, 5, 6, 9, 10, 12) \text{ in } V_x(3, 15)$$

3. Add two unsigned numbers x and y using carry look-ahead addition technique. Evaluate generate (g_i) and propagate (p_i) functions for all bit positions. Calculate the sum (S_i) using carry bits (c_i) and both inputs (x_i, y_i). Carry bits (c_i) have to be evaluated using generate (g_i) and propagate (p_i) functions.

$$x + y = 23_{10} + 45_{10} = 68_{10}$$

4. Implement the function f using a single 4/1 multiplexer.

$$f(a, b, c, d) = (a \cdot \overline{b} + b \cdot c \cdot \overline{d} + b \cdot c) \cdot ((a \cdot c \cdot d) \cdot (\overline{c} + d))$$

Rešitev 1. naloge

Funkcija je zapisana v večnivojski obliki, torej jo izrazimo v normalno obliko.

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 \downarrow x_2) \cdot \overline{x_3} + ((\overline{x_2} \equiv x_4) \downarrow \overline{x_1})$$

Funkciji NOR (\downarrow) in ekvivalence (\equiv) izpišemo:

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (\overline{x_1 + x_2}) \cdot \overline{x_3} + \left(\overline{(\overline{x_2 \oplus x_4}) + x_1} \right)$$

Ekvivalenco smo izrazili kot negacijo XOR. Uporabimo De Morganov teorem:

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = \overline{x_1} \cdot \overline{x_2} \cdot \overline{x_3} + (\overline{x_2 \oplus x_4}) \cdot x_1$$

Izpišemo enačbo funkcije XOR ($a \oplus b = \overline{a} \cdot b + a \cdot \overline{b}$) in dobimo:

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = \overline{x_1} \cdot \overline{x_2} \cdot \overline{x_3} + (\overline{x_2} \cdot \overline{x_4} + x_2 \cdot x_4) \cdot x_1$$

Razširimo še zadnjo konjunkcijo in rezultat je oblika MDNO:

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = \overline{x_1} \cdot \overline{x_2} \cdot \overline{x_3} + \overline{x_2} \cdot \overline{x_4} \cdot x_1 + x_1 \cdot x_2 \cdot x_4$$

Če uporabimo lastnost Boole-ove algebre ($\overline{\overline{a}} + a = 1$) lahko zapišemo:

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = \overline{x_1} \cdot \overline{x_2} \cdot \overline{x_3} \cdot x_4 + \overline{x_1} \cdot \overline{x_2} \cdot \overline{x_3} \cdot \overline{x_4} + x_1 \cdot \overline{x_2} \cdot \overline{x_3} \cdot \overline{x_4} + x_1 \cdot \overline{x_2} \cdot x_3 \cdot \overline{x_4} + x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot x_4 + x_1 \cdot x_2 \cdot \overline{x_3} \cdot x_4$$

Kar lahko zapišemo v obliki PDNO:

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, x_3, x_4) &= \overline{x_1} \cdot \overline{x_2} \cdot \overline{x_3} \cdot \overline{x_4} + \overline{x_1} \cdot \overline{x_2} \cdot \overline{x_3} \cdot x_4 + x_1 \cdot \overline{x_2} \cdot \overline{x_3} \cdot \overline{x_4} + x_1 \cdot \overline{x_2} \cdot x_3 \cdot \overline{x_4} + x_1 \cdot x_2 \cdot \overline{x_3} \cdot x_4 + x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot x_4 \\ f_{PDNO}(x_1, x_2, x_3, x_4) &= V(0, 1, 8, 10, 13, 15) \end{aligned}$$

PDNO pretvorimo v PKNO tako, da pregledamo manjkajoče minterme: 2, 3, 4, 5, 6, 7, 9, 11, 12, 14. Te minterme preslikamo preko tabele:

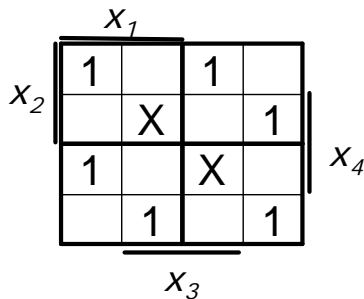
m _i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
M _i	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0

Funkcija v PKNO se torej glasi:

$$\begin{aligned} f_{PDNO}(x_1, x_2, x_3, x_4) &= V(0, 1, 8, 10, 13, 15) \\ f_{PKNO}(x_1, x_2, x_3, x_4) &= \&(13, 12, 11, 10, 9, 8, 6, 4, 3, 1) \end{aligned}$$

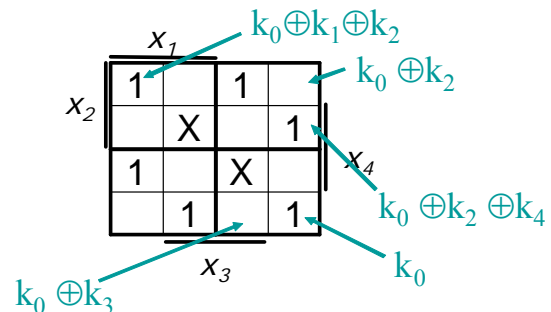
Rešitev 2. naloge:

Funkcijo najprej izrišemo v Veitch–ev diagram:



Funkcija vsebuje same diagonalne člene, zato realizacija v obliki KNO oz. DNO ne nudi minimalne oblike. Če se izkaže, da je funkcija linearna, jo lahko realiziramo s pomočjo XOR funkcij. Linearnost funkcije ugotavljamo tako, da prepogibamo kvadrate diagrama: Začnemo v desnem spodnjem kotu (kjer je minterm 0) in prepognemo kvadrat navzgor, da se spremeni samo ena spremenljivka naenkrat (x_4 postane 0 v prvi iteraciji).

Opazujemo, ali se prepogne na novi kvadrat čisto enako ali pa popolnoma negirano. Če postavimo obe redundanci na '1', lahko s prepogibanjem ugotovimo, da je funkcija linearna.



Podana funkcija je funkcija 4 spremenljivk, zato lahko njeno splošno izražavo kot linearno funkcijo pišemo kot:

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = k_0 \oplus k_1 x_1 \oplus k_2 x_2 \oplus k_3 x_3 \oplus k_4 x_4$$

S pomočjo Veitch–evega diagrama izračunamo koeficiente.

Iz enačb sledi: $k_0=1$ in $k_0 \oplus k_3=0$, kar pomeni $1 \oplus k_3=0 \rightarrow k_3=1$.

In če napišemo še enačbo za $k_0 \oplus k_2=0$, kar pomeni $1 \oplus k_2=0$ sledi da je $k_2=1$.

Iz enačbe $k_0 \oplus k_2 \oplus k_4=1$, kar pomeni $1 \oplus 1 \oplus k_4=1 \rightarrow k_4=1$.

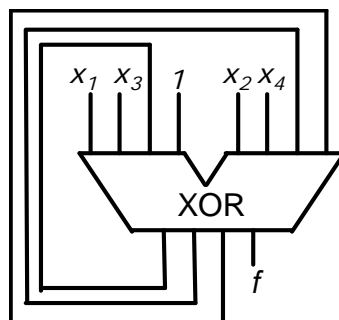
Analiziramo naprej in dobimo $k_0 \oplus k_1 \oplus k_2=1$, kar pomeni $1 \oplus k_1 \oplus 1=0 \rightarrow k_1=1$.

Vstavimo dobljene koeficiente v enačbo za splošno izražavo in dobimo:

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = 1 \oplus x_1 \oplus x_2 \oplus x_3 \oplus x_4$$

Aritmetično–logično enota lahko poleg aritmetičnih naenkrat realizira štiri dvovhodne logične operacije *istega tipa* (OR, AND, NOT, NOR, NAND, XOR, XNOR), zato nas zanima realizacija zgornje funkcije z dvovhodnimi operatorji enega tipa. Pri realizaciji uporabimo lastnost združevanja, ki velja za XOR funkcijo.

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = 1 \oplus ((x_1 \oplus x_2) \oplus (x_3 \oplus x_4))$$



Rešitev 3. naloge:

Uporaba "carry look ahead" načina seštevanja zahteva določitev vrednosti funkcij tvorjenja (g_i) in širjenja (p_i). Končni rezultat izračunamo z uporabo prenosov, ki izvirajo iz pomožnih funkcij (g_i) in (p_i), ter vhodnih operandov x in y . Bistvena prednost tega načina seštevanja je, da prenose lahko izračunamo vnaprej (ang. look ahead) vzporedno na osnovi enačb, s katerimi dani prenos izrazimo kot funkcijo (g_i) in (p_i) ter vhodnega prenosa. Zaradi vzporednega načina izračuna prenosov je izračun vsote neodvisen od števila mest seštevalnika. Problem tega načina so kompleksne funkcije, ki nastanejo pri naraščajočem številu mest seštevanja, zato se CLA seštevalniki združujejo po 4 mesta, izhodi za funkcije tvorjenja (g) in širjenja (p) teh CLA pa se vežejo na generator izhodnih prenosov (ang. carry look ahead generator oz. CLAG). Način seštevanja "carry look ahead" zahteva določitev vrednosti funkcij tvorjenja (g_i) in širjenja (p_i) ter prenosa na naslednje mesto (c_{i+1}) za vsako mesto posebej.

Osnovne enačbe "carry look ahead" so:

$$\begin{aligned}g_i &= x_i \cdot y_i \\p_i &= x_i \oplus y_i \\c_{i+1} &= g_i + p_i \cdot c_i\end{aligned}$$

Pri seštevanju upoštevamo, da vhodnega prenosa ni ($C_{in}=0$).

Preostali prenosi se izračunajo vzporedno iz izrazov iterativnega vstavljanja formule za prenos c_{i+1} od mesta 0 do mesta 7 (mesto izhodnega prenosa). Slednje je bistvena prednost "carry look ahead" načina seštevanja pred običajnim "ripple carry" načinom seštevanja.

$$\begin{aligned}c_0 &= c_{in} = 0 \\c_1 &= g_0 + p_0 \cdot c_0 = 1 + 0 \cdot 0 = 1 \\c_2 &= g_1 + p_1 \cdot c_1 = 0 + 1 \cdot 1 = 1 \\c_3 &= g_2 + p_2 \cdot c_2 = 1 + 0 \cdot 1 = 1 \\c_4 &= g_3 + p_3 \cdot c_3 = 0 + 1 \cdot 1 = 1 \\c_5 &= g_4 + p_4 \cdot c_4 = 0 + 1 \cdot 1 = 1 \\c_6 &= g_5 + p_5 \cdot c_5 = 0 + 1 \cdot 1 = 1 \\c_7 &= g_6 + p_6 \cdot c_6 = 0 + 0 \cdot 1 = 0\end{aligned}$$

i	7	6	5	4	3	2	1	0
x_i		0	0	1	0	1	1	1
+	y_i		0	1	0	1	1	0
	g_i		0	0	0	0	1	0
	p_i		0	1	1	1	0	1
	c_i	0	1	1	1	1	1	0
	S_i	0	1	0	0	0	1	0

Mesta vsote S_i dobimo z XOR operacijo $S_i = x_i \oplus y_i \oplus c_i$ pri čemer XOR predstavlja vsoto po modulu 2 oz. funkcijo v PDNO: $S_i(x_i, y_i, c_i) = V(1, 2, 4, 7)$.

Rešitev 4. naloge:

Funkcija f je podana v večnivojski (nenormalni) obliki:

$$f(a,b,c,d) = (a \cdot \bar{b} + b \cdot c \cdot \bar{d} + b \cdot c) \cdot ((a \cdot c \cdot d) \cdot (\bar{c} + d))$$

zato jo najprej poenostavimo z uporabo pravil Boole-ove logike. Izpišemo desni člen funkcije in uporabimo lastnost Boole-ove logike $x \cdot \bar{x} = 0$, lastnost $x \cdot x = x$ in lastnost $0 + x = x$.

$$f(a,b,c,d) = (a \cdot \bar{b} + b \cdot c \cdot \bar{d} + b \cdot c) \cdot (a \cdot c \cdot d \cdot \bar{c} + a \cdot c \cdot d \cdot d)$$

Nad rezultatom ponovno uporabimo lastnost Boole-ove logike $x \cdot \bar{x} = 0$ in lastnost $x \cdot x = x$.

$$f(a,b,c,d) = (a \cdot \bar{b} + b \cdot c \cdot \bar{d} + b \cdot c) \cdot (a \cdot c \cdot d)$$

Rezultat vnesemo v levi del funkcije in znova uporabimo omenjene lastnosti Boole-ove logike:

$$f(a,b,c,d) = (a \cdot \bar{b} \cdot a \cdot c \cdot d + b \cdot c \cdot \bar{d} \cdot a \cdot c \cdot d + b \cdot c \cdot a \cdot c \cdot d)$$

Dobimo dva člena in ju zapišemo v obliki PDNO, ki jo nato minimiziramo s pomočjo Veitch-evega diagrama ali z uporabo lastnosti združevanja Boole-ove algebre $x + \bar{x} = 1$:

$$f(a,b,c,d) = a \cdot \bar{b} \cdot c \cdot d + b \cdot a \cdot c \cdot d$$

$$f_{PDNO}(a,b,c,d) = V(11, 15)$$

$$f_{MDNO}(a,b,c,d) = a \cdot c \cdot d \cdot (\bar{b} + b) = a \cdot c \cdot d$$

in jo realiziramo z enim izbiralnikom 4/1, tako da naredimo Shannon-ov razvoj funkcije. Glede na kombinacijo naslovnih vhodov izbiralnika dobimo 6 možnih rešitev (ac, ca, ad, da, cd, dc).

