

RAZVOJ DIGITALNIH SISTEMOV

1. kolokvij
06. 12. 2011

1. Določite popolno konjunktivno normalno obliko (PKNO) in popolno disjunktivno normalno obliko (PDNO) funkcije f .

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 \downarrow x_2) \cdot \overline{x_3} + ((\overline{x_2} \equiv x_4) \downarrow \overline{x_1})$$

2. Ali je funkcija f linearna? Če je linearna, potem izračunajte koeficiente linearnosti. Če ni linearna, potem utemeljite zakaj.

$$f^4 = V(0, 3, 4, 7, 9, 10, 13, 14)$$

3. Realizirajte podano funkcijo f z redundantnimi makstermi s čim manj izbiralniki 4/1.

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = \&(1, 5, 7 - 9, 11, 12) \quad in \quad \&_x(3, 4, 10, 15)$$

4. Pretvorite število 123_{10} (1111011_2) v BCD zapis z uporabo "double dabble" algoritma.

Rešitev 1. naloge

Funkcija je zapisana v večnivojski obliki, torej jo izrazimo v normalno obliko.

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 \downarrow x_2) \cdot \overline{x_3} + ((\overline{x_2} \equiv x_4) \downarrow \overline{x_1})$$

Funkciji NOR (\downarrow) in ekvivalence (\equiv) izpišemo:

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (\overline{x_1 + x_2}) \cdot \overline{x_3} + \left(\overline{(\overline{x_2 \oplus x_4}) + x_1} \right)$$

Ekvivalenco smo izrazili kot negacijo XOR. Uporabimo De Morganov teorem:

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = \overline{x_1} \cdot \overline{x_2} \cdot \overline{x_3} + (\overline{x_2 \oplus x_4}) \cdot x_1$$

Izpišemo enačbo funkcije XOR ($a \oplus b = \overline{a} \cdot b + a \cdot \overline{b}$) in dobimo:

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = \overline{x_1} \cdot \overline{x_2} \cdot \overline{x_3} + (\overline{x_2} \cdot \overline{x_4} + x_2 \cdot x_4) \cdot x_1$$

Razširimo še zadnjo konjunkcijo in rezultat je oblika MDNO:

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = \overline{x_1} \cdot \overline{x_2} \cdot \overline{x_3} + \overline{x_2} \cdot \overline{x_4} \cdot x_1 + x_1 \cdot x_2 \cdot x_4$$

Če uporabimo lastnost Boole-ove algebre ($\overline{\overline{a}} + a = 1$) lahko zapišemo:

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = \overline{x_1} \cdot \overline{x_2} \cdot \overline{x_3} \cdot x_4 + \overline{x_1} \cdot \overline{x_2} \cdot \overline{x_3} \cdot \overline{x_4} + x_1 \cdot \overline{x_2} \cdot \overline{x_3} \cdot x_4 + x_1 \cdot \overline{x_2} \cdot \overline{x_3} \cdot \overline{x_4} + x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot x_4 + x_1 \cdot x_2 \cdot \overline{x_3} \cdot x_4$$

Kar lahko zapišemo v obliki PDNO:

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = \overline{x_1} \cdot \overline{x_2} \cdot \overline{x_3} \cdot \overline{x_4} + \overline{x_1} \cdot \overline{x_2} \cdot \overline{x_3} \cdot x_4 + x_1 \cdot \overline{x_2} \cdot \overline{x_3} \cdot \overline{x_4} + x_1 \cdot \overline{x_2} \cdot \overline{x_3} \cdot x_4 + x_1 \cdot x_2 \cdot \overline{x_3} \cdot \overline{x_4} + x_1 \cdot x_2 \cdot \overline{x_3} \cdot x_4$$
$$f_{PDNO}(x_1, x_2, x_3, x_4) = V(0, 1, 8, 10, 13, 15)$$

PDNO pretvorimo v PKNO tako, da pregledamo manjkajoče minterme: 2, 3, 4, 5, 6, 7, 9, 11, 12, 14. Te minterme preslikamo preko tabele:

m _i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
M _i	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0

Funkcija v PKNO se torej glasi:

$$f_{PDNO}(x_1, x_2, x_3, x_4) = V(0, 1, 8, 10, 13, 15)$$
$$f_{PKNO}(x_1, x_2, x_3, x_4) = \&(13, 12, 11, 10, 9, 8, 6, 4, 3, 1)$$

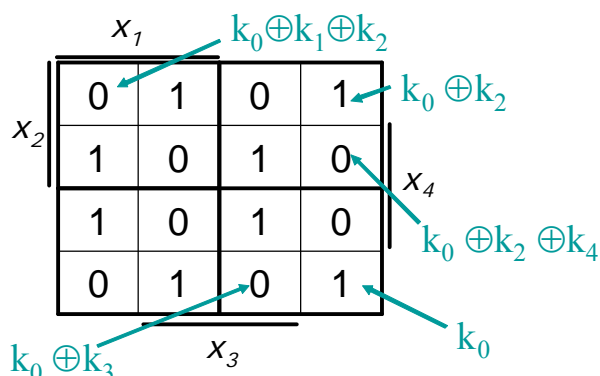
Čas pisanja je 60 minut. Vsaka naloga je vredna 10 točk.

Na list z rešitvami se podpišite in napišite še vpisno številko ter kateri predmet pišete.

Rezultati bodo objavljeni na: <https://estudent.fri.uni-lj.si>

Rešitev 2. naloge:

Potrebno je določiti koeficiente linearnosti funkcije podane v PDNO. Linearnost funkcije ugotavljamo tako, da prepogibamo kvadrate diagrama: Začnemo v desnem spodnjem kotu (kjer je minterm 0) in prepognemo kvadrat navzgor, da se spremeni samo ena spremenljivka naenkrat (recimo da x_4 postane 1 v prvi iteraciji). Opazujemo, ali se prepogne na novi kvadrat čisto enako ali pa popolnoma negirano. Prepogibanje je prikazano v knjigi, stran 79, vaja 6.5.5.



Podana funkcija je funkcija 4 spremenljivk, zato lahko njeno splošno izražavo kot linearno funkcijo pišemo kot:

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = k_0 \oplus k_1 x_1 \oplus k_2 x_2 \oplus k_3 x_3 \oplus k_4 x_4 \quad (2.1)$$

S pomočjo Veitch–evega diagrama izračunamo koeficiente.

Iz enačb sledi: $k_0=1$ in $k_0 \oplus k_3=0$, kar pomeni $0 \oplus k_3=1 \rightarrow k_3=1$.

In če napišemo še enačbo za $k_0 \oplus k_2=1$, kar pomeni $1 \oplus k_2=1$ sledi da je $k_2=0$.

Iz enačbe $k_0 \oplus k_2 \oplus k_4=0$, kar pomeni $1 \oplus 0 \oplus k_4=0 \rightarrow k_4=1$.

Če analiziramo naprej dobimo $k_0 \oplus k_1 \oplus k_2=0$, kar pomeni $1 \oplus k_1 \oplus 0=0 \rightarrow k_1=1$.

Če vstavimo dobljeno v enačbo (2.1) dobimo: $k_0=1$ $k_1=1$ $k_2=0$ $k_3=1$ $k_4=1$

In rešitev:

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, x_3, x_4) &= 1 \oplus x_1 \oplus x_3 \oplus x_4 \\ f(x_1, x_2, x_3, x_4) &= \overline{x_1 \oplus x_3 \oplus x_4} \\ f(x_1, x_2, x_3, x_4) &= (x_1 \equiv x_3 \equiv x_4) \end{aligned}$$

Rešitev 3. naloge:

Funkcija f je podana v obliki PKNO z redundancami.

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = \&(1, 5, 7 - 9, 11, 12) \text{ in } \&_x(3, 4, 10, 15)$$

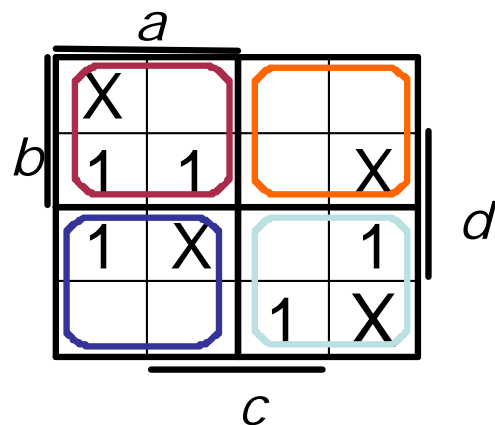
Za potrebe realizacije jo najprej pretvorimo v obliko PDNO. To storimo tako, da maksterme preslikamo v minterme. V pravilnostno tabelo funkcije najprej zapišemo številke mintermov (m) in pripadajoče številke makstermov (M). Vpišemo $f='0'$ za vse maksterme in $f='X'$ za vse redundantne maksterme. Na preostala mesta vpišemo $f='1'$ in preberemo pri katerih mintermih je $f='1'$ oz. $f='X'$ ter funkcijo izrazimo v obliki PDNO.

m	M	a	b	c	d	f
0	15	0	0	0	0	X
1	14	0	0	0	1	1
2	13	0	0	1	0	1
3	12	0	0	1	1	0
4	11	0	1	0	0	0
5	10	0	1	0	1	X
6	9	0	1	1	0	0
7	8	0	1	1	1	0
8	7	1	0	0	0	0
9	6	1	0	0	1	1
10	5	1	0	1	0	0
11	4	1	0	1	1	X
12	3	1	1	0	0	X
13	2	1	1	0	1	1
14	1	1	1	1	0	0
15	0	1	1	1	1	1

Dobimo:

$$f = V(1, 2, 9, 13, 15) \text{ in } V_x(0, 5, 11, 12)$$

Dobljeno funkcijo vrišemo v Veitch-ev diagram. Ker iščemo najcenejšo realizacijo z izbiralnikom 4/1, bomo naredili razvoj po vseh kombinacijah naslovnih spremenljivk v Veitchev-em diagramu. Če izberemo kot naslovni spremenljivki a in b , potem dobimo:



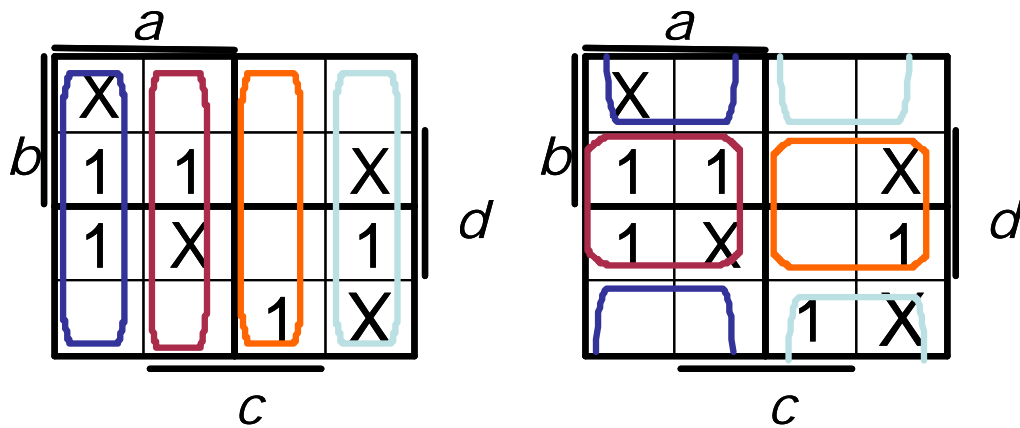
Čas pisanja je 60 minut. Vsaka naloga je vredna 10 točk.

Na list z rešitvami se podpišite in napišite še vpisno številko ter kateri predmet pišete.

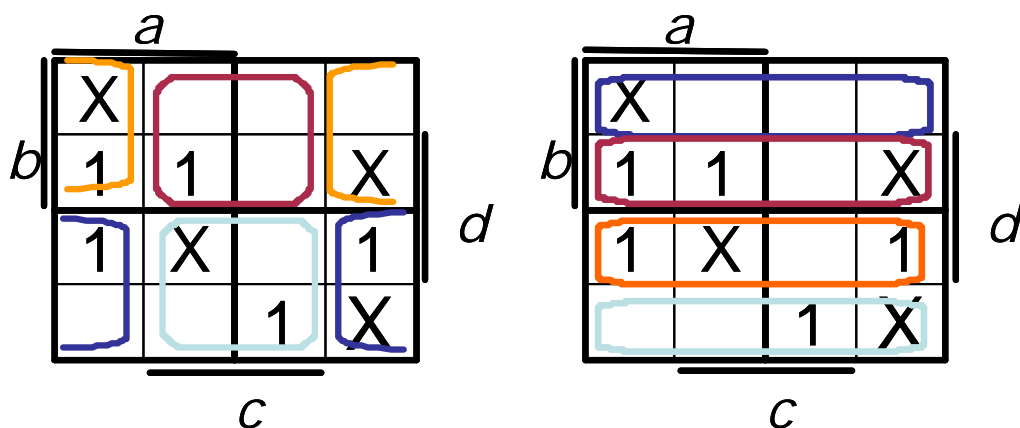
Rezultati bodo objavljeni na: <https://estudent.fri.uni-lj.si>

V zgornjem Veitch–evem diagramu so označena vsa štiri polja štirih mintermov, če izberemo vhodni spremenljivki a in b . Zgornji levi kvadrat (rdeč) pomeni, da bo to polje izbrano ko bosta $ab="11"$, oranžni kvadrat ko bo $ab="01"$, temno modri ko bo $ab="10"$ in svetlo modri ko bo $ab="00"$. Vsakega od teh kvadratov poskušamo opisati s čimbolj enostavno funkcijo: Vrednost zgornjega levega kvadrata opišemo s spremenljivko d , če postavimo redundanco na '0'. Vrednost spodnjega desnega kvadrata je bolj komplicirana, saj moramo vsako '1' opisati posebej: Za zgornjo '1' v tem kvadratu velja $c \cdot d$, za spodnjo '1' pa $c \cdot d'$. Funkcija bo torej $c \cdot d + c \cdot d'$, kar je enačba funkcije XOR. Najbolj enostavna realizacija je zgornji desni kvadrat, ki je kar '0', če postavimo redundanco na '0'. Zato, da bi pregledali še ostale možnosti, moramo narisati še preostalih pet kombinacij dveh naslovnih vhodov.

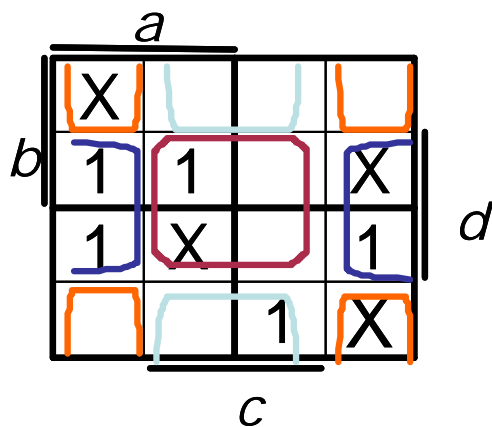
Če izberemo kot naslovni spremenljivki a in c , dobimo levi Veitchev diagram, če a in d , pa desnega. Podobno kot v prejšnjem primeru poiščemo realizacije ustreznih kvadratov in iščemo najcenejšo realizacijo: Izogibamo se veliko različnim funkcijam in iščemo inačice kvadratov, ki vsebujejo same '1' ali same '0'. Pri razvoju po a in c imamo pri $ac="01"$ najneugodnejšo funkcijo, saj vsebuje eno samo '1'; medtem ko je razvoju po a in d nikjer ne nastopa ena sama '1' ali tri '1' ali diagonalna (XOR) dveh '1'.



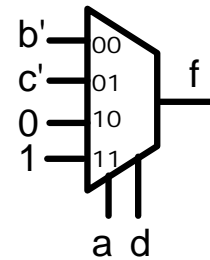
Nato izberemo naslovni spremenljivki b in c , (levi Veitchev diagram) in b in d (desni diagram). Pri razvoju po b in c imamo pri $bc="11"$ najneugodnejšo funkcijo (rdeč), saj vsebuje eno samo '1'; medtem ko imamo pri razvoju po b in d pri $bd="11"$ (rdeč) najneugodnejšo funkcijo, saj vsebuje tri '1'.



Zadnja kombinacija naslovnih vhodov je cd. Pri razvoju po c in d imamo pri cd="10" najneugodnejšo funkcijo (svetlo moder), saj vsebuje eno samo '1'. Najbolj ugodna kombinacija za realizacijo je torej razvoj po spremenljivkah a in d.



Končna realizacija funkcije:



Rešitev 4. naloge:

Število $123_{10} = 01111011_2$. Oziroma zapis posameznih števk: 0001 0010 0011 v BCD zapisu.

STOTICE				DESETICE				ENICE												
												0	1	1	1	1	0	1	1	START
										0		1	1	1	1	0	1	1		POMIK1
									0	1		1	1	1	0	1	1			POMIK2
									0	1	1	1	0	1	1					POMIK3
								0	1	1	1	1	0	1	1					ADD3
								1	0	1	0	1	0	1	1					POMIK4
							1	0	1	0	1	0	1	1						ADD3
							1	1	0	0	0	0	0	1	1					POMIK5
						1	1	0	0	0	0	0	1	1						POMIK6
					1	1	0	0	0	0	0	1	1							POMIK7
				1	0	0	1	0	0	0	1	1								ADD3
			1	0	0	1	0	0	0	1	1									POMIK8
1 ₁₀				2 ₁₀				3 ₁₀												