

# RAZVOJ DIGITALNIH SISTEMOV

1. kolokvij

15. 12. 2021

1. Določite minimalno normalno obliko (MNO) podane logične funkcije  $f$ .

$$f(x_1, x_2, x_3) = \overline{(x_1 \oplus x_2) \cdot \bar{x}_3 \cdot (x_1 \downarrow x_3)}$$

2. Realizirajte podano funkcijo  $f$  v obliki PKNO z redundantnimi makstermi z eno 4-bitno aritmetično-logično enoto (ALU). Vse dobljene negacije vhodnih spremenljivk izvedite z ALU.

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = \&(1, 3, 4, 6, 7, 14, 15) \text{ in } \&_x(0, 5, 10, 12, 13)$$

3. Uporabite ROM vezje za realizacijo funkcij:

$$\begin{aligned} g_1(x_1, x_2, x_3) &= x_1 + \bar{x}_2 \cdot \bar{x}_3 & g_2(x_1, x_2, x_3) &= \bar{x}_1 \cdot x_3 + x_1 \cdot x_2 \\ g_3(x_1, x_2, x_3) &= \bar{x}_2 \cdot \bar{x}_3 + x_1 \cdot x_2 & g_4(x_1, x_2, x_3) &= \bar{x}_2 \cdot x_3 + x_1 \end{aligned}$$

ROM vezje ima 3 naslovne spremenljivke in 4 bitno vsebino. Narišite shemo ROM vezja in v shemi označite programirane povezave s piko (●). Programirane povezave naj realizirajo funkcije  $g_1, g_2, g_3, g_4$ .

4. Pretvorite število  $2022_{22} = 21342_{10} = 535E_{16}$  v BCD zapis z uporabo "double dabble" algoritma.

## Rešitev 1. naloge

Določitev minimalne normalne oblike funkcije (MNO) zahteva njeno pretvorbo v minimalno disjunktivno (MDNO) in minimalno konjunktivno obliko (MKNO). Iz primerjave COST obeh funkcij določimo MNO kot cenejšo izvedbo. Funkcijo  $f$  moramo pretvoriti v disjunktivno obliko:

$$f = \overline{(x_1 \oplus x_2) \cdot \bar{x}_3 \cdot (x_1 \downarrow x_3)}$$

Začnemo s Piercevim ( $\downarrow$ ) operatorjem in »izključno ali« operacijo ( $\oplus$ ) izrazimo kot negacijo ekvivalence:

$$f = \overline{(x_1 \cdot x_2 + \bar{x}_1 \cdot \bar{x}_2 \cdot \bar{x}_3 \cdot (x_1 + x_3))}$$

Nad vsemi členi uporabimo De Morganov teorem ( $\overline{x + y + z} = \bar{x} \cdot \bar{y} \cdot \bar{z}$ ).

$$f = x_1 \cdot x_2 + \bar{x}_1 \cdot \bar{x}_2 + x_3 + x_1 + x_3$$

Izraz lahko poenostavimo ob uporabi lastnosti Booleove logike  $x \cdot x = x$  in dobimo:

$$f = x_1 \cdot x_2 + \bar{x}_1 \cdot \bar{x}_2 + x_3 + x_1$$

Funkcija je zrela za izris v Veitchevem diagramu:

|       |       |   |   |   |
|-------|-------|---|---|---|
|       | $x_1$ |   |   |   |
| $x_2$ | 1     | 1 | 1 | 0 |
|       | 1     | 1 | 1 | 1 |
|       | $x_3$ |   |   |   |

Iz diagrama zapišemo MDNO z zbiranjem '1':

$$f = f_{MDNO} = x_1 + \bar{x}_2 + x_3$$

COST funkcije  $f_{MDNO}$  znaša (1, 3). Funkcijo  $f_{MDNO}$  »pretvorimo« v MKNO tako da narišemo Veitchev diagram, iz katerega izrazimo  $\bar{f}$ . Funkcijo  $\bar{f}$  izrazimo tako da v Veitchevem diagramu zberemo ničle in običajno združujemo člene v disjunktivni obliki.

|       |       |   |   |   |
|-------|-------|---|---|---|
|       | $x_1$ |   |   |   |
| $x_2$ | 1     | 1 | 1 | 0 |
|       | 1     | 1 | 1 | 1 |
|       | $x_3$ |   |   |   |

Dobljeno zapišemo kot:

$$\bar{f} = \bar{x}_1 \cdot x_2 \cdot \bar{x}_3$$

Levo in desno stran enačbe negiramo še enkrat, da se negacija »prenese« na desno stran enačbe in uporabimo De Morganov teorem:

$$f = \overline{\bar{x}_1 \cdot x_2 \cdot \bar{x}_3} = x_1 + \bar{x}_2 + x_3$$

Končno dobimo MKNO:

$$f_{MKNO} = x_1 + \bar{x}_2 + x_3$$

katere COST znaša (1, 3). Iz enakosti COST funkcij sledi, da sta funkciji ekvivalentni, zato velja  $f_{MNO} = f_{MDNO} = f_{MKNO}$ .

Rešitev 2. naloge:

Funkcija  $f$  je podana v obliki PKNO z redundancami:

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = \&(1, 3, 4, 6, 7, 14, 15) \text{ in } \&_x(0,5,10,12,13)$$

Najprej jo pretvorimo v obliko PDNO, da maksterme preslikamo v minterme. V pravilnostno tabelo funkcije najprej zapišemo številke mintermov ( $m$ ) in pripadajoče številke makstermov ( $M$ ). Vpišemo  $f=0$  za vse maksterme in  $f=X$  za vse redundantne maksterme. Na preostala mesta vpišemo  $f=1$  in preberemo pri katerih mintermih je  $f=1$  oz.  $f=X$  ter funkcijo izrazimo v obliki PDNO.

Tabela mintermov in makstermov:

| $m$ | $M$ | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $f$ |
|-----|-----|-------|-------|-------|-------|-----|
| 0   | 15  | 0     | 0     | 0     | 0     | 0   |
| 1   | 14  | 0     | 0     | 0     | 1     | 0   |
| 2   | 13  | 0     | 0     | 1     | 0     | X   |
| 3   | 12  | 0     | 0     | 1     | 1     | X   |
| 4   | 11  | 0     | 1     | 0     | 0     | 1   |
| 5   | 10  | 0     | 1     | 0     | 1     | X   |
| 6   | 9   | 0     | 1     | 1     | 0     | 1   |
| 7   | 8   | 0     | 1     | 1     | 1     | 1   |
| 8   | 7   | 1     | 0     | 0     | 0     | 0   |
| 9   | 6   | 1     | 0     | 0     | 1     | 0   |
| 10  | 5   | 1     | 0     | 1     | 0     | X   |
| 11  | 4   | 1     | 0     | 1     | 1     | 0   |
| 12  | 3   | 1     | 1     | 0     | 0     | 0   |
| 13  | 2   | 1     | 1     | 0     | 1     | 1   |
| 14  | 1   | 1     | 1     | 1     | 0     | 0   |
| 15  | 0   | 1     | 1     | 1     | 1     | X   |

Funkcijo zapišemo v PDNO:

$$f = V(4,6,7,13) \text{ in } V_x(2,3,5,10,15)$$

Funkcijo minimiziramo v MDNO.

| $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ |
|-------|-------|-------|-------|
| 0     | 0     | 1     | 1     |
| 1     | X     | 1     | X     |
| 0     | 0     | X     | 0     |
| 0     | X     | X     | 0     |

$$f_{MDNO} = \overline{x_1} \cdot x_2 + x_2 \cdot x_4$$

Izpostavimo  $x_2$  ter dvakrat negiramo:

$$f = x_2(\overline{\overline{x_1}} + \overline{\overline{x_4}})$$

Uporabimo De Morganov teorem s prvo negacijo in dobimo:

$$f = \overline{\overline{x_2}} + \overline{\overline{x_1}} + \overline{\overline{x_4}}$$

Dobljeno funkcijo zapišemo s Piercevimi operatorji:

$$f = \overline{x_2} \downarrow (\overline{x_1} \downarrow x_4)$$

Podobno storimo za MKNO:

| $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ |
|-------|-------|-------|-------|
| 0     | 0     | 1     | 1     |
| 1     | X     | 1     | X     |
| 0     | 0     | X     | 0     |
| 0     | X     | X     | 0     |

$$\overline{f} = \overline{\overline{x_2}} + x_1 \cdot \overline{x_4}$$

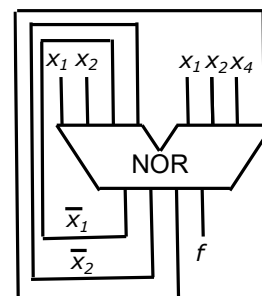
Levo in desno stran enačbe negiramo še enkrat, da se negacija prenese na desno stran enačbe.

$$f = \overline{\overline{x_2}} + \overline{x_1 \cdot \overline{x_4}}$$

Nad členom  $\overline{x_1 \cdot \overline{x_4}}$  uporabimo De Morganov teorem  $\overline{x + y} = \overline{x} \cdot \overline{y}$ :

$$f = \overline{x_2} + \overline{\overline{x_1}} + \overline{\overline{x_4}}$$

Dobimo enako funkcijo kot prej (Piercevimi operatorji), kar realiziramo z eno ALU:



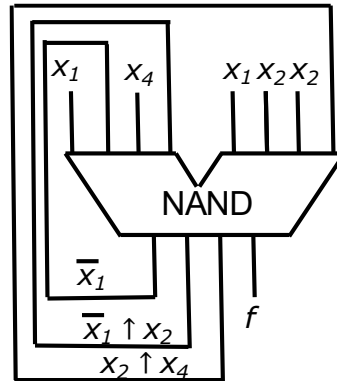
Pri realizaciji s realizacijo s Shefferjevimi operatorji lahko celotno MDNO funkcijo dvakrat negiramo:

$$f_{MDNO} = \overline{\overline{\overline{x_1} \cdot x_2 + x_2 \cdot x_4}}$$

Enkrat uporabimo DeMorganov teorem in dobimo:

$$f_{MDNO} = (\overline{x_1} \uparrow x_2) \uparrow (x_2 \uparrow x_4)$$

Dobljeno funkcijo realiziramo z eno ALU:



Za realizacijo s Shefferjevimi operatorji lahko izhajamo tudi iz negacije funkcije:

$$\overline{f} = \overline{x_2} + x_1 \cdot \overline{x_4}$$

Izvedemo dvojno negacijo nad posameznima členoma

$$\overline{f} = \overline{\overline{\overline{x_2} + x_1 \cdot \overline{x_4}}}$$

Uporabimo De Morganov teorem  $\overline{x \cdot y} = \overline{x} + \overline{y}$ :

$$\overline{f} = \overline{x_2 \cdot x_1 \cdot \overline{x_4}}$$

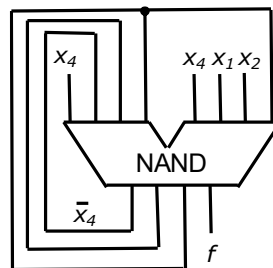
Dobljeno negacijo funkcije izrazimo s Shefferjevimi operatorji:

$$\overline{f} = x_2 \uparrow (x_1 \uparrow \overline{x_4})$$

Z uporabo lastnosti  $x \uparrow x = \overline{x}$  dobimo končni izraz:

$$f = (x_2 \uparrow (x_1 \uparrow (x_4 \uparrow x_4))) \uparrow (x_2 \uparrow (x_1 \uparrow (x_4 \uparrow x_4)))$$

Dobljeno funkcijo realiziramo z eno ALU:



Rešitev 3. naloge:

Če se funkcije ne nahajajo v popolni disjunktivni normalni obliki (PDNO), jih prevedemo v to obliko z uporabo Veitchovega diagrama tako, da izpišemo številke mintermov, kjer je funkcija enaka '1'.

$$g_1(x_1, x_2, x_3) = x_1 + \overline{x_2} \cdot \overline{x_3}$$

$$g_2(x_1, x_2, x_3) = \overline{x_1} \cdot x_3 + x_1 \cdot x_2$$

$$g_3(x_1, x_2, x_3) = \overline{x_2} \cdot \overline{x_3} + x_1 \cdot x_2$$

$$g_4(x_1, x_2, x_3) = \overline{x_2} \cdot x_3 + x_1$$

$$g_1:$$

|       |       |   |       |   |
|-------|-------|---|-------|---|
|       | $x_1$ |   |       |   |
| $x_2$ | 1     | 1 | 0     | 0 |
|       | 1     | 1 | 0     | 1 |
|       |       |   | $x_3$ |   |

$$g_2:$$

|       |       |   |       |   |
|-------|-------|---|-------|---|
|       | $x_1$ |   |       |   |
| $x_2$ | 1     | 1 | 1     | 0 |
|       | 0     | 0 | 1     | 0 |
|       |       |   | $x_3$ |   |

$$g_3:$$

|       |       |   |       |   |
|-------|-------|---|-------|---|
|       | $x_1$ |   |       |   |
| $x_2$ | 1     | 1 | 0     | 0 |
|       | 1     | 0 | 0     | 1 |
|       |       |   | $x_3$ |   |

$$g_4:$$

|       |       |   |       |   |
|-------|-------|---|-------|---|
|       | $x_1$ |   |       |   |
| $x_2$ | 1     | 1 | 0     | 0 |
|       | 1     | 1 | 1     | 0 |
|       |       |   | $x_3$ |   |

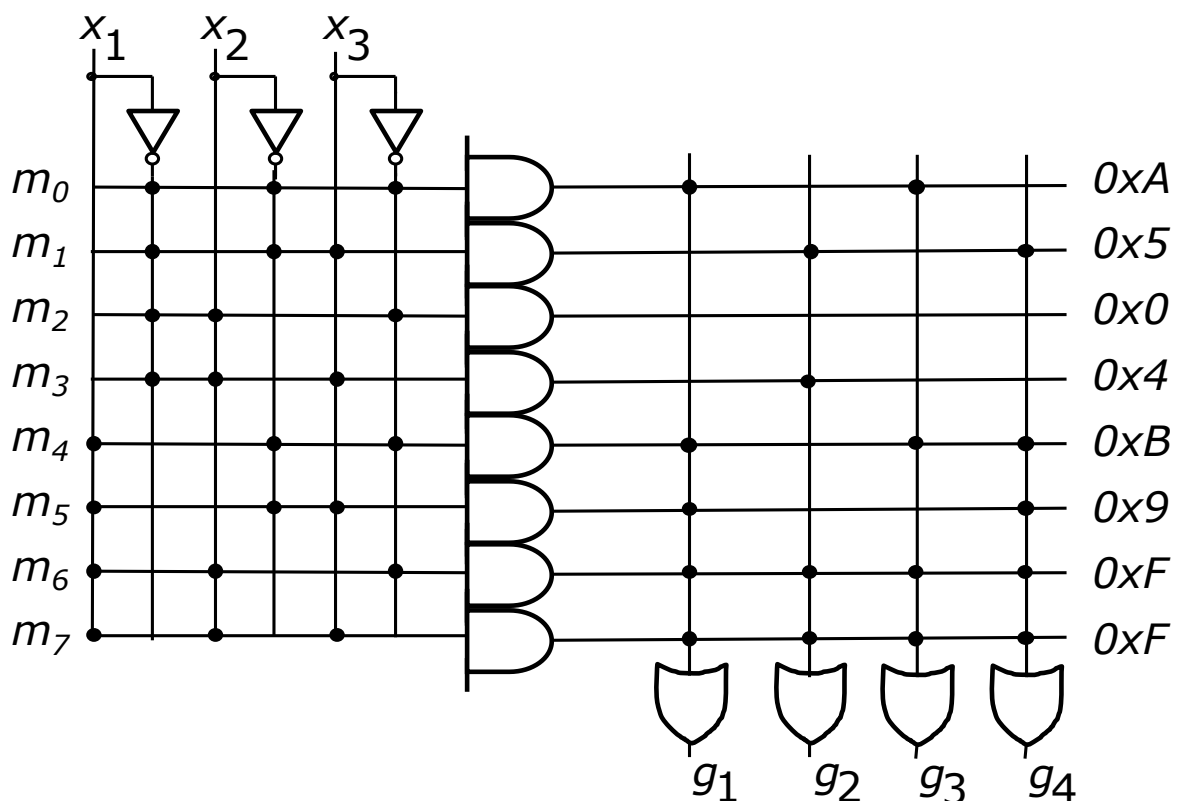
$$g_1(x_1, x_2, x_3) = V(0,4,5,6,7)$$

$$g_2(x_1, x_2, x_3) = V(1,3,6,7)$$

$$g_3(x_1, x_2, x_3) = V(0,4,6,7)$$

$$g_4(x_1, x_2, x_3) = V(1,4,5,6,7)$$

PDNO je najprimernejša oblika za realizacijo z ROM, ker je matrika AND fiksna. Programirane vrednosti AND matrike (pike ●) predstavljajo vse minterme funkcije treh spremenljivk ( $x_1$   $x_2$   $x_3$ ) od  $m_0$  do  $m_7$ . Številka minterma določa naslov lokacije ROM pomnilnika.



Narišemo celotno vezje ROM strukture in vstavimo pike (●) v OR matriki tam, kjer želimo programirati določeno spremenljivko v členu PDNO. Če bi realizirali  $g_1$  na MSB mestu in  $g_4$  na LSB mestu vsebine ROM, bi se njegova HEX datoteka glasila: 0A 05 00 04 0B 09 0F 0F.

Čas pisanja je 60 minut. Vsaka naloga je vredna 10 točk.  
Na list z rešitvami se podpišite in napišite še vpisno številko.  
Rezultati bodo objavljeni na domači strani predmeta.

Rešitev 4. naloge:

Število  $2022_{22} = 21342_{10} = 535E_{16}$  zapišemo v dvojiški obliki  $0101\ 0011\ 0101\ 1110_2$ . Vodilna ničla v zapisu nas ne zanima, zato jo lahko v zapisu začetne vrednosti v tabeli ne pišemo. Prve tri pomike lahko preskočimo, saj do prvega prištevanja pride šele, ko prva '1' doseže vrednost  $0101_2$ .

|     |         |         |         |         | 1 0 1 | 0 0 1 1 | 0 1 0 1 | 1 1 1 0 |
|-----|---------|---------|---------|---------|-------|---------|---------|---------|
|     |         |         |         | 1 0 1   | 0 0 1 | 1 0 1 0 | 1 1 1 1 | 0       |
|     |         |         |         | 1 0 0 0 | 0 0 1 | 1 0 1 0 | 1 1 1 1 | 0       |
|     |         |         | 1       | 0 0 0 0 | 0 1 1 | 0 1 0 1 | 1 1 1 1 | 0       |
|     |         |         | 1 0     | 0 0 0 0 | 1 1 0 | 1 0 1 1 | 1 1 1   | 0       |
|     |         |         | 1 0 0   | 0 0 0 1 | 1 0 1 | 0 1 1 1 | 1 1     | 0       |
|     |         |         | 1 0 0 0 | 0 0 1 1 | 0 1 0 | 1 1 1 1 | 1       | 0       |
|     |         |         | 1 0 1 1 | 0 0 1 1 | 0 1 0 | 1 1 1 1 | 1       | 0       |
|     |         | 1       | 0 1 1 0 | 0 1 1 0 | 1 0 1 | 1 1 1 1 | 1       | 0       |
|     |         | 1       | 1 0 0 1 | 1 0 0 1 | 1 0 1 | 1 1 1 1 | 1       | 0       |
|     |         | 1 1     | 0 0 1 1 | 0 0 1 1 | 0 1 1 | 1 1 1   | 1       | 0       |
|     |         | 1 1 0   | 0 1 1 0 | 0 1 1 0 | 1 1 1 | 1 1     | 1       | 0       |
|     |         | 1 0 0 1 | 1 0 0 1 | 1 0 0 1 | 1 1 1 | 1 1     | 1       | 0       |
|     | 1       | 0 0 1 1 | 0 0 1 1 | 0 0 1 1 | 1 1 1 | 1       | 1       | 0       |
|     | 1 0     | 0 1 1 0 | 0 1 1 0 | 0 1 1 1 | 1 1   | 1       | 0       |         |
|     | 1 0     | 1 0 0 1 | 1 0 0 1 | 1 0 1 0 | 1 1   | 0       |         |         |
|     | 1 0 1   | 0 0 1 1 | 0 0 1 1 | 0 1 0 1 | 1     | 0       |         |         |
|     | 1 0 0 0 | 0 0 1 1 | 0 0 1 1 | 1 0 0 0 | 1     | 0       |         |         |
| 1   | 0 0 0 0 | 0 1 1 0 | 0 1 1 1 | 0 0 0 1 | 0     |         |         |         |
| 1   | 0 0 0 0 | 1 0 0 1 | 1 0 1 0 | 0 0 0 1 | 0     |         |         |         |
| 1 0 | 0 0 0 1 | 0 0 1 1 | 0 1 0 0 | 0 0 1 0 | 0     |         |         |         |

Zapis posameznih števk rezultata v BCD zapisu ( $21342_{10}$ ) se glasi: 0010 0001 0011 0100 0010.

Srečno 2022<sub>22</sub> ☺!