

RAZVOJ DIGITALNIH SISTEMOV

Izpit

19. 06. 2024

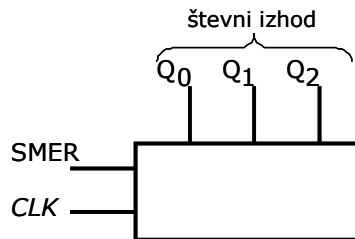
1. Določite popolno konjunktivno normalno obliko (PKNO) in popolno disjunktivno normalno obliko (PDNO) funkcije f .

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 \downarrow x_2) \cdot \overline{x_3} + ((\overline{x_2} \equiv x_4) \downarrow \overline{x_1})$$

2. Realizirajte podano funkcijo f z redundancami s čim manj 4-bitnimi aritmetičnimi–logičnimi enotami (ALU). Negacije vhodnih spremenljivk izvedite z ALU.

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = V(0, 5, 6, 9, 10, 12) \text{ in } V_x(3, 15)$$

3. Prikažite sintezo sinhronega dvosmernega 3-bitnega dvojiškega števca z uporabo T flip–flopov: Zapišite tabelo prehajanja stanj in določite enačbe flip–flopov. Števec ima vhod SMER, ki določa smer štetja in izhod štetja Q_2, Q_1, Q_0 . Če je SMER='0', števec šteje naraščajoče, sicer padajoče. Imena signalov so razvidna iz spodnje slike.



4. Z uporabo D flip–flopov, ki so proženi na sprednji rob signala ure CLK, načrtajte Moore–ove avtomat končnih stanj, ki deluje kot krmilje za kavni avtomat. Kava stane 15 centov, plačujemo pa lahko s kovancema za 5 in 10 centov. Krmilje ima:

- vhod *5cent*, ki postane '1', ko uporabnik vrže v avtomat kovanec za 5 centov in
- vhod *10cent* ki postane '1', ko uporabnik vrže v avtomat kovanec za 10 centov ter
- izhod *p*, ki postane '1', ko uporabnik vrže v avtomat skupno 15 centov.

Avtomat ne vrača drobiža in se ob detekciji plačila 15 centov ne vrača nazaj v začetno stanje, ampak ostane v končnem stanju. Vnos dveh kovancev naenkrat ni mogoč.

Rešitev 1. naloge

Funkcija je zapisana v večnivojski obliki, torej jo izrazimo v normalno obliko.

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 \downarrow x_2) \cdot \overline{x_3} + ((\overline{x_2} \equiv x_4) \downarrow \overline{x_1})$$

Funkciji NOR (\downarrow) in ekvivalence (\equiv) izpišemo:

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (\overline{x_1 + x_2}) \cdot \overline{x_3} + \left(\overline{(\overline{x_2 \oplus x_4}) + x_1} \right)$$

Ekvivalenco smo izrazili kot negacijo XOR. Uporabimo De Morganov teorem:

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = \overline{x_1} \cdot \overline{x_2} \cdot \overline{x_3} + (\overline{x_2 \oplus x_4}) \cdot x_1$$

Izpišemo enačbo funkcije XOR ($a \oplus b = \overline{a} \cdot b + a \cdot \overline{b}$) in dobimo:

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = \overline{x_1} \cdot \overline{x_2} \cdot \overline{x_3} + (\overline{x_2} \cdot \overline{x_4} + x_2 \cdot x_4) \cdot x_1$$

Razširimo še zadnjo konjunkcijo in rezultat je oblika MDNO:

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = \overline{x_1} \cdot \overline{x_2} \cdot \overline{x_3} + \overline{x_2} \cdot \overline{x_4} \cdot x_1 + x_1 \cdot x_2 \cdot x_4$$

Če uporabimo lastnost Boole-ove algebre ($\overline{\overline{a}} + a = 1$) lahko zapišemo:

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = \overline{x_1} \cdot \overline{x_2} \cdot \overline{x_3} \cdot x_4 + \overline{x_1} \cdot \overline{x_2} \cdot \overline{x_3} \cdot \overline{x_4} + x_1 \cdot \overline{x_2} \cdot \overline{x_3} \cdot \overline{x_4} + x_1 \cdot \overline{x_2} \cdot x_3 \cdot \overline{x_4} + x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot \overline{x_4} + x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot x_4 + x_1 \cdot x_2 \cdot \overline{x_3} \cdot x_4$$

Kar lahko zapišemo v obliki PDNO:

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = \overline{x_1} \cdot \overline{x_2} \cdot \overline{x_3} \cdot \overline{x_4} + \overline{x_1} \cdot \overline{x_2} \cdot \overline{x_3} \cdot x_4 + x_1 \cdot \overline{x_2} \cdot \overline{x_3} \cdot \overline{x_4} + x_1 \cdot \overline{x_2} \cdot x_3 \cdot \overline{x_4} + x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot \overline{x_4} + x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot x_4$$
$$f_{PDNO}(x_1, x_2, x_3, x_4) = V(0, 1, 8, 10, 13, 15)$$

PDNO pretvorimo v PKNO tako, da pregledamo manjkajoče minterme: 2, 3, 4, 5, 6, 7, 9, 11, 12, 14. Te minterme preslikamo preko tabele:

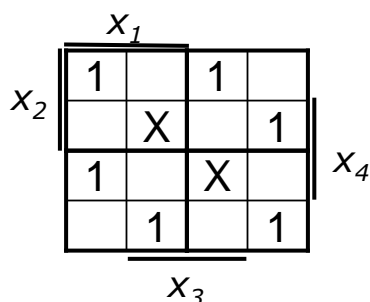
m _i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
M _j	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0

Funkcija v PKNO se torej glasi:

$$f_{PDNO}(x_1, x_2, x_3, x_4) = V(0, 1, 8, 10, 13, 15)$$
$$f_{PKNO}(x_1, x_2, x_3, x_4) = \&(13, 12, 11, 10, 9, 8, 6, 4, 3, 1)$$

Rešitev 2. naloge:

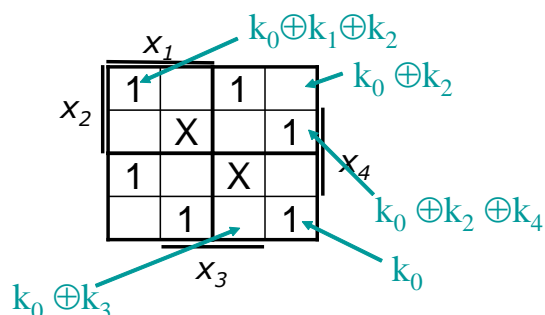
Funkcijo najprej izrišemo v Veitch–ev diagram:



Funkcija vsebuje same diagonalne člene, zato realizacija v obliki KNO oz. DNO ne nudi minimalne oblike. Če se izkaže, da je funkcija linearna, jo lahko realiziramo s pomočjo XOR funkcij. Linearnost funkcije ugotovljamo tako, da prepogibamo kvadrate diagrama: Začnemo v desnem spodnjem kotu (kjer je minterm 0) in prepognemo kvadrat navzgor, da se spremeni samo ena

spremenljivka naenkrat (x_4 postane 0 v prvi iteraciji).

Opazujemo, ali se prepogne na novi kvadrat čisto enako ali pa popolnoma negirano. Če postavimo obe redundanci na '1', lahko s prepogibanjem ugotovimo, da je funkcija linearna.



Podana funkcija je funkcija 4 spremenljivk, zato lahko njeno splošno izražavo kot linearno funkcijo pišemo kot:

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = k_0 \oplus k_1 x_1 \oplus k_2 x_2 \oplus k_3 x_3 \oplus k_4 x_4$$

S pomočjo Veitch–evega diagrama izračunamo koeficiente.

Iz enačb sledi: $k_0=1$ in $k_0 \oplus k_3=0$, kar pomeni $1 \oplus k_3=0 \rightarrow k_3=1$.

In če napišemo še enačbo za $k_0 \oplus k_2=0$, kar pomeni $1 \oplus k_2=0$ sledi da je $k_2=1$.

Iz enačbe $k_0 \oplus k_2 \oplus k_4=1$, kar pomeni $1 \oplus 1 \oplus k_4=1 \rightarrow k_4=1$.

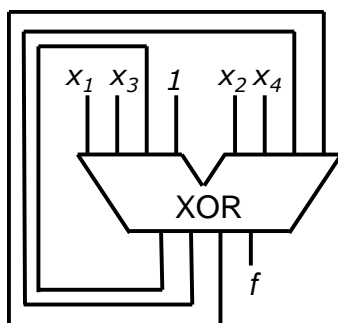
Analiziramo naprej in dobimo $k_0 \oplus k_1 \oplus k_2=1$, kar pomeni $1 \oplus k_1 \oplus 1=0 \rightarrow k_1=1$.

Vstavimo dobljene koeficiente v enačbo za splošno izražavo in dobimo:

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = 1 \oplus x_1 \oplus x_2 \oplus x_3 \oplus x_4$$

Aritmetično–logično enota lahko poleg aritmetičnih naenkrat realizira štiri dvovhodne logične operacije *istega tipa* (OR, AND, NOT, NOR, NAND, XOR, XNOR), zato nas zanima realizacija zgornje funkcije z dvovhodnimi operatorji enega tipa. Pri realizaciji uporabimo lastnost združevanja, ki velja za XOR funkcijo.

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = 1 \oplus ((x_1 \oplus x_2) \oplus (x_3 \oplus x_4))$$



Rešitev 3. naloge:

Postopek sinteze zahteva, da zapišemo tabelo prehajanja stanj števca:

SMER	Q ₂	Q ₁	Q ₀	Q ₂	Q ₁	Q ₀	T ₂	T ₁	T ₀
0	0	0	0	0	0	1	0	0	1
0	0	0	1	0	1	0	0	1	1
0	0	1	0	0	1	1	0	0	1
0	0	1	1	1	0	0	1	1	1
0	1	0	0	1	0	1	0	0	1
0	1	0	1	1	1	0	0	1	1
0	1	1	0	1	1	1	0	0	1
0	1	1	1	0	0	0	1	1	1
1	0	0	0	1	1	1	1	1	1
1	0	0	1	0	0	0	0	0	1
1	0	1	0	0	0	1	0	1	1
1	0	1	1	0	1	0	0	0	1
1	1	0	0	0	1	1	1	1	1
1	1	0	1	1	0	0	0	0	1
1	1	1	0	1	0	1	0	1	1
1	1	1	1	1	1	0	0	0	1

Normalna analiza bi zahtevala, da narišemo Veitch–eve diagrame za štiri spremenljivke za vsak vhod T–FF, vendar ker so T–FF po svoji naravi primerni za realizacijo števec, so praviloma njihove vhodne enačbe zelo enostavne. Iz tabele prehajanja stanj števca določimo enačbe T–FF:

Iz stolpca T₀ se vidi, da je T₀=**1**'. Iz stolpca T₁ se vidi, da se ponavlja vzorec **01**, če je SMER='0' in **10**, če je SMER='1'.

SMER	T ₁
0	Q ₀
1	Q ₀ '

kar lahko kratko zapišemo kot:

$$T_1 = \text{SMER} \cdot \overline{Q_0} + \overline{\text{SMER}} \cdot Q_0 = \text{SMER} \oplus Q_0$$

Za T₂ se da enostavno ugotoviti realizacijo iz Veitch–evega diagrama:

SMER			
Q ₂	1	0	0
	0	0	1
	0	0	1
	1	0	0
Q ₁			Q ₀

$$T_2 = \text{SMER} \cdot \overline{Q_1} \cdot \overline{Q_0} + \overline{\text{SMER}} \cdot Q_1 \cdot Q_0$$

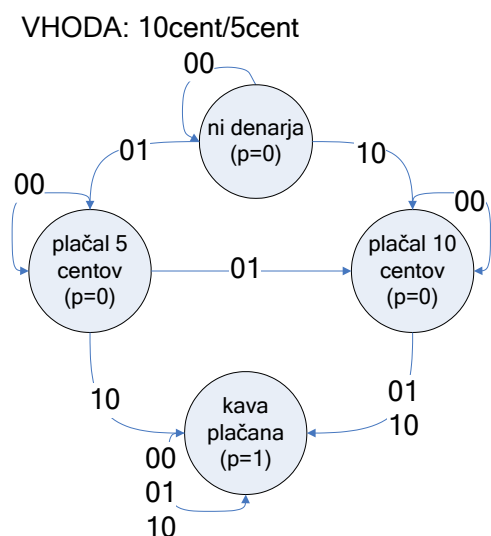
V enačbi za T₂ poiščemo podobnosti z enačbo za T₁: Enačba za T₁ vsebuje konjunkciji SMER·Q₀' in SMER'·Q₀, ki sta vsebovani tudi v enačbi za T₂, kar nam dodatno poenostavi realizacijo števca. Obenem nam taka realizacija nakazuje osnovno strukturo, ki jo lahko s ponavljanjem razširimo v večbitni dvosmerni sinhroni števec.

² <http://www.alldatasheet.com/view.jsp?Searchword=74161>

Rešitev 4. naloge:

Moore—ova realizacija avtomata končnih stanj. Opis diagrama stanj:

Na začetku se nahajamo v stanju "ni denarja", v katerem je izhod $p=0$. Vhoda v avtomat sta dva: 10cent in 5cent, kar na diagramu kodiramo kot 10cent/5cent.



"plačal 5 centov" in uporabnik vrže v avtomat 10 centov (10cent/5cent=10), potem preide v stanje "kava plačana", kjer postavimo izhod ($p=1$). Stanje "kava plačana" je končno in tam tudi ostanemo za vse možne kombinacije. Če smo v stanju "plačal 10 centov" in uporabnik vrže v avtomat 5 ali 10 centov (10cent/5cent=10 oz. 01), potem podobno preidemo v stanje "kava plačana", kjer postavimo izhod ($p=1$).

Naredimo tabelo prehajanja stanj:

trenutno stanje	10cent	5cent	naslednje stanje	izhod p
ni denarja	0	0	ni denarja	0
ni denarja	0	1	plačal 5 centov	0
ni denarja	1	0	plačal 10 centov	0
ni denarja	1	1	X	X
plačal 5 centov	0	0	plačal 5 centov	0
plačal 5 centov	0	1	plačal 10 centov	0
plačal 5 centov	1	0	kava plačana	0
plačal 5 centov	1	1	X	X
plačal 10 centov	0	0	plačal 10 centov	0
plačal 10 centov	0	1	kava plačana	0
plačal 10 centov	1	0	kava plačana	0
plačal 10 centov	1	1	X	X
kava plačana	0	0	kava plačana	1
kava plačana	0	1	kava plačana	1
kava plačana	1	0	kava plačana	1
kava plačana	1	1	X	X

Izberemo kodiranje stanj:

stanje	Q_1	Q_0
--------	-------	-------

ni denarja	0	0
plačal 5 centov	0	1
plačal 10 centov	1	0
kava plačana	1	1

Nad tabelo prehajanja stanj uporabimo predlagano kodiranje stanj:

Q_1	Q_0	10cent	5cent	Q_1	Q_0	izhod p
0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	1	0	1	0
0	0	1	0	1	0	0
0	0	1	1	X	X	X
0	1	0	0	0	1	0
0	1	0	1	1	0	0
0	1	1	0	1	1	0
0	1	1	1	X	X	X
1	0	0	0	1	0	0
1	0	0	1	1	1	0
1	0	1	0	1	1	0
1	0	1	1	X	X	X
1	1	0	0	1	1	1
1	1	0	1	1	1	1
1	1	1	0	1	1	1
1	1	1	1	X	X	X

Naloga zahteva realizacijo z D-FF:

Veitch-ev diagram za D_1 :

t				t+1				
Q_1	Q_0	10cent	5cent	Q_1	Q_0	D_1	D_0	izhod p
0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	1	0	1	0	1	0
0	0	1	0	1	0	1	0	0
0	0	1	1	X	X	X	X	X
0	1	0	0	0	1	0	1	0
0	1	0	1	1	0	1	0	0
0	1	1	0	1	1	1	1	0
0	1	1	1	X	X	X	X	X
1	0	0	0	1	0	1	0	0
1	0	0	1	1	1	1	1	0
1	0	1	0	1	1	1	1	0
1	0	1	1	X	X	X	X	X
1	1	0	0	1	1	1	1	1
1	1	0	1	1	1	1	1	1
1	1	1	0	1	1	1	1	1
1	1	1	1	X	X	X	X	X

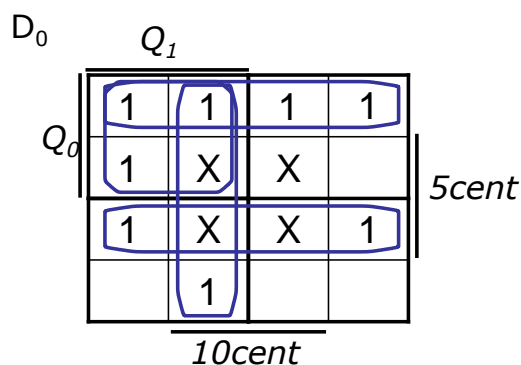
Iz dobljene tabele narišemo Veitch-eve diagrame za oba D-FF in izhod p:

$$D_0 = V(1, 4, 6, 9, 10, 12-14) \text{ in } Vx(3, 7, 11, 15)$$

$$D_1 = V(2, 5, 6, 8, 9, 10, 12-14) \text{ in } Vx(3, 7, 11, 15)$$

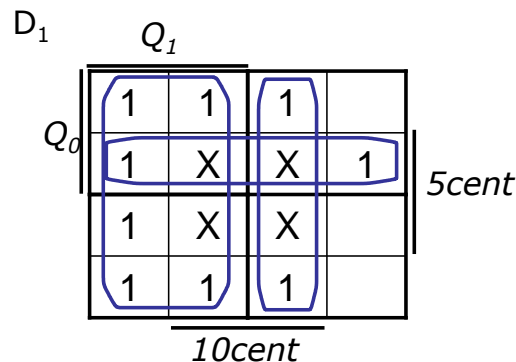
$$p = V(12-14) \text{ in } Vx(3, 7, 11, 15)$$

Veitch-ev diagram za D_0 :



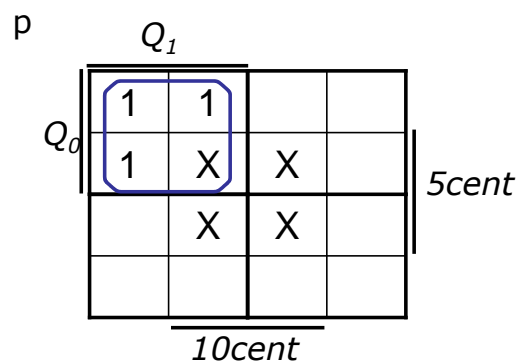
$$D_0 = Q_1 \cdot Q_0 + \overline{5cent} \cdot Q_0 + 10cent \cdot Q_1 + 5cent \cdot \overline{Q_0}$$

$$D_0 = Q_1 \cdot (Q_0 + 10cent) + 5cent \oplus Q_0$$



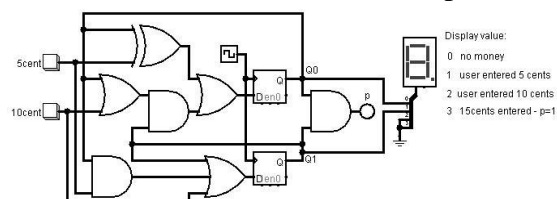
$$D_1 = Q_1 + 5cent \cdot Q_0 + 10cent$$

Veitch-ev diagram za izhod p:



$$p = Q_1 \cdot Q_0$$

Enačbo za izhod p bi lahko napisali tudi samo s sklepanjem, saj se izhod p postavi samo, ko je avtomat v stanju "kava plačana", ki ima kodo $Q_1Q_0="11"$ – torej ko bosta Q_1 in Q_0 enaka '1', bo izhod $p=1$.



Vezje se nahaja v Logisim predlogah rešenih nalog na domači strani predmeta: Logisim\fsm\Vending_machine_d_ff_5_10_cents_price_15cents.cir

Čas pisanja je 60 minut. Vsaka naloga je vredna 10 točk.
Na list z rešitvami se podpišite in napišite še vpisno številko ter kateri predmet pišete (VSŠ, UNI).
Rezultati bodo objavljeni na: <https://estudent.fri.uni-lj.si>